Bd 205-207 Math

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt,
F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar,
P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel

Band 207

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1961

Archiv-Nr. 180361
Satz und Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 30
Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis des Bandes 207

Seite

Benz, Walter, Über Winkel- und Transitivitätseigenschaften in Kreisebenen. II. 1

Biermann, Kurt-R., Eine unveröffentlichte Jugendarbeit C. G. J. Jacobis über wiederholte Funktionen 96

Carlitz, L. and **Stevens, H.,** Criteria for Generalized Kummer's Congruences 203

Cohen, Eckford, On the Inversion of Even Functions of Finite Abelian Groups (mod H) 192

Helmberg, Gilbert, Zerlegungen des Mittelwertes fastperiodischer Funktionen. I. 31

Jacobson, N., Some groups of Transformations defined by Jordan Algebras. III. 61

Jantscher, Lothar, Über die Lösungen einer partiellen elliptischen Differentialgleichung, deren Koeffizienten von einem komplexen Parameter abhängen 129

Krzywoblocki, M. Z. v., On the Existence Proof of the Flow in the Boundary Layer in a Compressible Fluid. II. 113

Laugwitz, Detlef, Anwendungen unendlich kleiner Zahlen. I. 53

Pietsch, Albrecht, Quasi-präkompakte Endomorphismen und ein Ergodensatz in lokalkonvexen Vektorräumen 16

Schmidt, Wolfgang, Stetige Funktionen auf dem Torus 86

Stuloff, N., Dirichletsche Reihen und Momentprobleme 179

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 207

Heft 1/2 ausgegeben am 15. Mai 1961

Heft 3/4 ausgegeben am 15. Juli 1961

Über Winkel- und Transitivitätseigenschaften in Kreisebenen. II.

Von *Walter Benz* in Mainz.

Im Vorliegenden setzen wir die in Teil I (J. reine angew. Math. 205 (1960), 48—74) begonnenen Untersuchungen fort. Literaturverweise beziehen sich auf das in Teil I angegebene Literaturverzeichnis; ferner übernehmen wir die in Teil I eingeführten Begriffe und Bezeichnungen. — Eine Zusammenfassung der hier mitgeteilten Resultate findet sich in der Einleitung zu Teil I.

§ 4. Möbiusebenen mit einer minimal dreifach transitiven Gruppe von Kreisverwandtschaften und ihre Algebraisierung.

In diesem Paragraphen geben wir eine algebraische Beschreibung der Struktur, die sich zusammensetzt aus einer Möbiusebene Σ und einer Gruppe T von Kreisverwandtschaften von Σ, die der Eigenschaft (T 1) genügt, jedoch nicht notwendig zusätzlich dem Axiom von Süss. Wir beginnen unsere Erörterungen mit der (s. Tits [16])

Definition. *Unter einem Titsfeld $\mathfrak{K}$ sei ein Bereich doppelter Komposition, „+", „·", mit den folgenden Eigenschaften verstanden:*

(1) *$\mathfrak{K}$ enthält ausgezeichnete Elemente $0, 1, -1$ mit $1 \neq 0 \neq -1$.*

(2) *$\mathfrak{K} - \{0\}$ bildet gegenüber der Verknüpfung „·" eine Gruppe $\mathfrak{K}^*$ — die multiplikative Gruppe von $\mathfrak{K}$ genannt — mit dem Einselement 1.*

(3) *$a + b$ ist eindeutig definiert für je zwei Elemente $a, b \in \mathfrak{K}$.*

(4) *Es gibt eine eindeutige Abbildung $b \to \bar{b}$ von $\mathfrak{K}^*$ in sich, so daß für je zwei Flemente $a, b \in \mathfrak{K}^*$ stets $(a + 1) + b = \bar{b}a + (1 + b)$ gilt.*
(Semiassoziatives Gesetz der Addition.)

(5) *Für jedes Element $a \in \mathfrak{K}$ ist $0 + a = a + 0 = a$.*

(6) $(-1) + 1 = 0 = 1 + (-1)$.

(7) *$a(b + c) = ab + ac$ ist erfüllt für je drei Elemente $a, b, c \in \mathfrak{K}$.*

(8) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

(9) *$(-1)\,a = a(-1)$ gilt für jedes Element $a \in \mathfrak{K}$. Statt $(-1)\,a$ wird auch $-a$ geschrieben.*

(10) *Es gibt einen involutorischen Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{K}^*$, $a \to a'$, mit $(-1)' = -1$ und $(a' + 1)' = -(a + 1)' + 1$ für jedes Element $a \neq 0, -1$.*

Die Einzigkeit (im anzugebenden Sinne) der Größen $0, -1$ entnimmt man den folgenden einfachen Bemerkungen:

(a) Zu zwei Elementen $a, b \in \mathfrak{K}$ gibt es genau ein Element $x \in \mathfrak{K}$ mit $x + a = b$. Hieraus folgt unmittelbar: Es gibt genau ein Element $u \in \mathfrak{K}$ zu $a \in \mathfrak{K}$ mit $u + a = a$, nämlich 0, und es gibt genau ein Element $v \in \mathfrak{K}$ mit $v + 1 = 0$, nämlich -1.

Zum Beweise zeigen wir zunächst die Hilfsformel

(b) Es ist $(k+b)-b=k$ und $(k-b)+b=k$ für je zwei Elemente k, b aus $\mathfrak{K}$, wobei z. B. $k-b$ bedeutet $k+(-1)\,b$.

Beweis. Wir wollen $\overline{-1}$ berechnen. Dazu setzen wir $a=-1$, $b=-1$ in (4) und beachten (5) und (6):

$$-1=0+(-1)=((-1)+1)+(-1)=\overline{-1}\,(-1)+(1+(-1))=\overline{-1}\,(-1).$$

Da -1, $\overline{-1}$ Elemente von $\mathfrak{K}^*$ sind, hat man nach Kürzung von -1:

$$\overline{-1}=1.$$

Nun ergibt also (4)

$$(a+1)-1=a+(1+(-1))=a \text{ für jedes } a\in\mathfrak{K}.$$

Unter hauptsächlicher Beachtung von (7) schließt man nun einfach auf die erste Behauptung $(k+b)-b=k$. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten, wenn wir gezeigt haben:

(c) Es gilt $(-1)(-1)=1$.

Nach (6), (7), (8) und mit $(-1)\cdot 1=(-1)$ nach (2) ist

$$0=(-1)\cdot 0=(-1)\,((-1)+1)=(-1)\,(-1)+(-1).$$

Mit (6) ergibt dies $1+(-1)=0=(-1)\,(-1)+(-1)$. Also ist mit dem schon bewiesenen Teil von (b)

$$1\equiv(1+(-1))-(-1)=((-1)\,(-1)+(-1))-(-1)=(-1)\,(-1);$$

damit ist (c) bewiesen und also auch vollends (b). Zum Beweise von (a): $x+a=b$ wird nach (b) durch $x=b-a$ gelöst. Gäbe es zwei verschiedene x_1, x_2 mit $x_1+a=b=x_2+a$, so ergäbe wiederum (b):

$$x_1=(x_1+a)-a=(x_2+a)-a=x_2.$$

(d) Es ist $(a')^{-1}=(a^{-1})'$ für jedes $a\neq 0$ aus $\mathfrak{K}$.

Beweis. Da $a\to a'$ ein Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{K}^*$ ist, hat man $1'=1$ und damit $1=1'=(aa^{-1})'=a'(a^{-1})'$, was sofort $(a')^{-1}=(a^{-1})'$ ergibt.

(e) Ist $\mathfrak{K}$ kommutativer Körper und setzt man für $a\neq 0$, $a\in\mathfrak{K}$,

$$\bar{a}=1,\quad a'=\frac{1}{a},$$

so liegt ein Titsfeld vor.

Es gilt der folgende Satz (Tits [16]):

Gegeben sei eine Menge $\mathfrak{P}$ von wenigstens drei verschiedenen Elementen. Gegeben sei ferner eine auf $\mathfrak{P}$ minimal dreifach transitive Gruppe T von eineindeutigen Abbildungen von $\mathfrak{P}$ auf sich. Zeichnet man dann drei verschiedene Elemente $\infty, 0, 1$ in $\mathfrak{P}$ aus, so können die von ∞ verschiedenen Elemente zu einem Titsfeld $\mathfrak{K}$ so zusammengefaßt werden, daß die Substitutionen $x\to y$ von T wiedergegeben werden durch die Abbildungen

$$y=ax+b,\quad a,b\in\mathfrak{K},\quad a\neq 0$$
$$y=a(x+b)'+c,\quad a,b,c\in\mathfrak{K},\quad a\neq 0,$$

wenn noch gesetzt wird:

$$0'=\infty,\ \infty'=0,$$
$$a\infty=\infty a=\infty \text{ für alle } a\in\mathfrak{K} \text{ mit } a\neq 0,$$
$$\infty+a=a+\infty=\infty \text{ für alle } a\in\mathfrak{K}\text{[14]}.$$

[14]) Ist $\mathfrak{K}$ ein Titsfeld, so nennen wir $\mathfrak{K}\cup\{\infty\}$ — versehen mit den angegebenen Rechenregeln für ∞ — den uneigentlich abgeschlossenen Bereich zu $\mathfrak{K}$.

Adjungiert man umgekehrt zu einem Titsfeld $\mathfrak{K}$ ein Element ∞, $\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{K} \cup \{\infty\}$, so bilden die angeschriebenen Substitutionen unter Beachtung der Rechenregeln mit ∞ eine auf $\mathfrak{P}$ minimal dreifach transitive Gruppe von eineindeutigen Abbildungen von $\mathfrak{P}$ auf sich.

Dabei werden die Operationen ab, $a + b$, $a \to a'$ in der folgenden Weise eingeführt:

Man definiert 1) Proportionalitäten, 2) Inversionen, 3) Symmetrien, nacheinander als Substitutionen von T, die 1) ∞ und 0 einzeln festlassen, 2) 0 und ∞ vertauschen, 3) Involutionen sind und ∞ festlassen.

Die Identität wird dabei genau dann als Involution angesehen, wenn es keine nichtidentische involutorische Abbildung aus T mit zwei verschiedenen Fixpunkten gibt.

Unter einer Haupttranslation wird das Produkt der Involution, die ∞ und 0 festläßt, mit einer Symmetrie verstanden. Ist dann $a \neq 0$ und ist τ die Proportionalität, die 1 nach a überführt, so sei $ab = b^\tau$; ist σ die Inversion, die 1 festläßt, so sei $a' = a^\sigma$. Bezeichnet schließlich ϱ die Haupttranslation, die 0 nach b überführt, so sei $a + b = a^\varrho$ gesetzt.

Wir schreiben noch drei Hilfssätze an, die auf Tits zurückgehen (T sei minimal dreifach transitiv auf $\mathfrak{P}$, $|\mathfrak{P}| \geqq 3$):

Hilfssatz 4a. *Sind p, q verschiedene Punkte, so gibt es höchstens eine Abbildung $\tau \in T$ mit $\tau \neq 1$, $\tau^2 = 1$, $(p, q)^\tau = (p, q)$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe Abbildungen τ, σ mit $\tau \neq \sigma$, $\tau \neq 1 \neq \sigma$, $\tau^2 = 1 = \sigma^2$ und $(p, q)^\tau = (p, q) = (p, q)^\sigma$. Es sei r ein von p, q verschiedener Punkt und es sei $r^\tau = s$ und $r^\sigma = t$ (wegen $\tau \neq 1 \neq \sigma$ ist $r \neq s$ und $r \neq t$). Ferner sei ϱ diejenige Abbildung aus T mit $(p, r, s)^\varrho = (p, r, t)$. Dann ist $(p, r, s)^{\varrho\sigma\varrho^{-1}} = (p, s, r) = (p, r, s)^\tau$, d. h. es ist $\varrho\sigma\varrho^{-1} = \tau$. Beachtet man nun $(q^\varrho)^\sigma = q^{\varrho\sigma} = q^{\tau\varrho} = q^\varrho$, so muß also wegen $\sigma \neq 1$ entweder $q^\varrho = q$ oder $q^\varrho = p$ sein. Wegen $p^\varrho = p$ ist $q^\varrho = p$ nicht möglich. Damit besitzt also ϱ die Fixpunkte p, r, q, was $\varrho = 1$ und also $\tau = \sigma$ ergibt; Widersprueh.

Hilfssatz 4b. *Die nichtidentischen Involutionen von T, die wenigstens einen Fixpunkt besitzen, haben entweder alle genau zwei verschiedene Fixpunkte oder aber alle genau einen. (Tritt der erste Fall auf, so heißt T eine Gruppe von 1. Art, sonst von 2. Art.)*

Beweis. Sei τ eine nichtidentische Involution aus T, die genau zwei verschiedene Fixpunkte p, q besitzt. Gäbe es nun eine nichtidentische Involution σ aus T mit genau einem Fixpunkt r, so bilde man die Abbildung λ aus T mit $(r, a, a^\sigma)^\lambda = (p, b, b^\tau)$, wo $a \neq r$, $b \neq p, q$ festgewählte Punkte sind. λ ist eindeutig bestimmt, da $a \neq a^\sigma \neq r$ und $b \neq b^\tau \neq p$ ist. Wegen $(r, a, a^\sigma)^{\lambda\tau\lambda^{-1}} = (r, a^\sigma, a)$ ist $\sigma = \lambda\tau\lambda^{-1}$; dann hätte aber σ noch den von r verschiedenen Fixpunkt $q^{\lambda^{-1}}$.

Hilfssatz 4c. *Sei T eine Gruppe von 1. Art. Sind dann p, q verschiedene Punkte, so gibt es genau eine Abbildung $\tau \in T$ mit $\tau \neq 1$, $\tau^2 = 1$, $(p, q)^\tau = (p, q)$.*

Beweis. Sei r ein Punkt $\neq p, q$. Sei σ die Abbildung mit $(p, q, r)^\sigma = (p, r, q)$. Da T von 1. Art ist, gibt es gewiß einen Punkt $s \neq p$ mit $s^\sigma = s$. Es ist also sicherlich $s \neq q, r$. Nun sei λ irgendeine Abbildung aus T mit $(p, q)^\lambda = (p, s)$. Dann ist $\lambda\sigma\lambda^{-1} \neq 1$ (sonst wäre $\sigma = 1$), $(\lambda\sigma\lambda^{-1})^2 = 1$ und $(p, q)^{\lambda\sigma\lambda^{-1}} = (p, q)$. Nach Hilfssatz 4a ist also $\tau = \lambda\sigma\lambda^{-1}$.

Um nun zur Algebraisierung der zu Beginn dieses Paragraphen betrachteten Möbiusebenen zu kommen, beginnen wir mit drei Definitionen.

Definition. *Es sei $\mathfrak{K}$ ein Titsfeld. Dann heiße $\mathfrak{U}$ Unter-Titsfeld von $\mathfrak{K}$, wenn Folgendes gilt:*

(1) $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{K}$,

(2) *Es ist* $0, 1, -1 \in \mathfrak{U}$,

(3) *Mit* $a \in \mathfrak{U}$, $a \neq 0$, *ist* a^{-1}, a', $\bar{a} \in \mathfrak{U}$,

(4) *Mit* $a, b \in \mathfrak{U}$ *ist* $a + b$, $ab \in \mathfrak{U}$.

Definition. *Es seien $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ Titsfelder. Dann heiße $\mathfrak{K}_2$ quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$, in Zeichen $\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1 = 2$, wenn Folgendes gilt:*

(1) *$\mathfrak{K}_1$ ist Unter-Titsfeld von $\mathfrak{K}_2$,*

(2) *$\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1 \neq \emptyset$,*

(3) *Zu jedem $i \in \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$ und zu jedem $z \in \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$ gibt es Größen $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}_1$ mit $z = (\alpha + i)\,\beta$.*

Die jetzt folgende Definition betrifft jedes Titsfeld:

Definition. *Es sei $\mathfrak{K}$ ein Titsfeld und $\mathfrak{K} \cup \{\infty\}$ der zu $\mathfrak{K}$ uneigentlich abgeschlossene Bereich. Unter Ausnutzung der Rechenregeln betreffend ∞ ordnen wir dann jedem geordneten Elementequadrupel a, b, c, d, bestehend aus paarweise verschiedenen Elementen aus $\mathfrak{K} \cup \{\infty\}$, ein Doppelverhältnis, in Zeichen $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$, zu; für $a = \infty$ sei*

$$\begin{bmatrix} \infty & b \\ d & c \end{bmatrix} = (c - b)^{-1}(d - b);$$

für $a \neq \infty$ sei

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \frac{1}{[(c - a)' - (b - a)']}\,[(d - a)' - (b - a)']\ ^{15)}.$$

Auch genau drei verschiedenen Elementen a, b, c, d aus $\mathfrak{K} \cup \{\infty\}$ wird ein Doppelverhältnis zugewiesen und zwar sei genau dann $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} =$ resp. $\infty, 0, 1$, wenn resp. eine Spalte, Diagonale, Zeile der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$ gleiche Elemente aufweist.

Wie man sich leicht überlegt, ist $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$ für vier verschiedene Punkte a, b, c, d eindeutig bestimmt und $\neq 0, 1, \infty$. Es gilt nun

Satz 4. 1. *Es sei Σ eine Möbiusebene, die eine minimal dreifach transitive Gruppe T von Kreisverwandtschaften besitzt. Dann ist Σ eine Möbiusebene im engeren Sinne und es gibt ein Titsfeld $\mathfrak{K}_1$ und eine quadratische Erweiterung $\mathfrak{K}_2$ von $\mathfrak{K}_1$ derart, daß die Menge $\mathfrak{P}$ der Punkte von Σ mit $\mathfrak{K}_2 \cup \{\infty\}$ identifiziert werden kann und daß weiterhin der Kreis durch die drei verschiedenen Punkte a, b, c gegeben ist durch*

$$\text{(D)} \qquad (abc) = \left\{ x \;\middle|\; \begin{bmatrix} a & b \\ x & c \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 \cup \{\infty\} \right\}.$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{K}_1$ ein Titsfeld und $\mathfrak{K}_2$ eine quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$, so entsteht eine Möbiusebene im engeren Sinne, die eine dreifach transitive Gruppe T von Kreisverwandtschaften besitzt, wenn man $\mathfrak{K}_2 \cup \{\infty\}$ als Punktmenge definiert und die Kreise vermittels (D) *erklärt.*

Der Beweis wird in mehreren Schritten erbracht:

4. 1. 1. *Es sei Σ eine Möbiusebene, die eine dreifach transitive Gruppe T von Kreisverwandtschaften besitzt. Dann ist Σ eine Möbiusebene im engeren Sinne.*

Gäbe es nämlich eine Fährte ([5]), die drei verschiedene Punkte a, b, c (und evtl. noch weitere Punkte) enthielte, so könnte man diese vermöge einer Kreisverwandtschaft in drei nicht gemeinsam einer einzigen Fährte angehörende Punkte überführen, was nicht möglich ist.

---

[15]) Für $b = \infty$ ist also $\begin{bmatrix} a & \infty \\ d & c \end{bmatrix} = \frac{1}{(c - a)' - \infty'}\,[(d - a)' - \infty'] = \frac{1}{(c - a)'}\,(d - a)'$; entsprechend findet man $\begin{bmatrix} a & b \\ d & \infty \end{bmatrix} = -\,[(b - a)^{-1}(d - a)]' + 1$ und $\begin{bmatrix} a & b \\ \infty & c \end{bmatrix} = \frac{1}{-\,[(b - a)^{-1}(c - a)]' + 1}$.

4. 1. 2. *Sei T eine Gruppe von 1. Art und seien p, q feste verschiedene Punkte. Die nach Hilfssatz 4a eindeutig existierende Involution $\tau \neq 1$ mit $(p, q)^\tau = (p, q)$ läßt dann jeden Kreis durch p, q einzeln fest.*

Beweis. Sei α ein beliebiger Kreis durch p, q, sei a ein Punkt $\neq p, q$ auf α und sei γ der Kreis durch q, der $\beta \equiv (paa^\tau)$ in p berührt oder für den $\gamma = \beta$ ist im Falle $q \in \beta$. Wegen $q \in \gamma \in \beta_p$ ist $q^\tau \in \gamma^\tau \in \beta_{p^\tau}^\tau$, d. h. $q \in \gamma^\tau \in \beta_p$. Damit ist $\gamma^\tau = \gamma$. Sei g ein Punkt $\neq p, q$ auf γ und sei ϱ diejenige Abbildung aus T mit $(p, q, a)^\varrho = (p, q, g)$. Es ist dann $\alpha^{\varrho\tau\varrho^{-1}} = \alpha$; da nach Hilfssatz 4a aber $\tau = \varrho\tau\varrho^{-1}$ sein muß, ist $\alpha^\tau = \alpha$.

Seien nun $\infty, 0, 1$ drei verschiedene — für das folgende fest ausgewählte — Punkte aus $\mathfrak{P}$. Dann kann also in $\mathfrak{K}_2 \equiv \mathfrak{P} - \{\infty\}$ eine Addition und eine Multiplikation eingeführt werden, so daß $\mathfrak{K}_2$ ein Titsfeld bildet.

4. 1. 3. *Sei $\varkappa$ der Kreis durch die drei verschiedenen Punkte $\infty, 0, 1$. Dann bilden die Elemente von $\varkappa - \{\infty\}$ ein Unter-Titsfeld $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}_2$.*

Beweis. Es ist $-1 \in \mathfrak{K}_1$: Im Falle $-1 = 1$ ist dies trivial. Sei $-1 \neq 1$. Dann ist T von 1. Art; im anderen Falle würde die Haupttranslation ϱ, die 0 nach 1 überführt, zusammenfallen mit der Symmetrie, die 0 in 1 abbildet; da aber eine Symmetrie Involution ist, würde folgen $1 + 1 = 1^\varrho = 1^{\varrho^{-1}} = 0$, d. h. $1 = (1+1) - 1 = 0 - 1 = -1$. Mit 4. 1. 2 sieht man, daß die nichtidentische Involution τ, die ∞ und 0 festläßt, $\varkappa$ in sich überführt. Nun ist aber $y = -x$ eine nichtidentische Involution, die ∞ und 0 als Fixpunkte besitzt; diese Abbildung stimmt demnach mit τ überein, was auf $1^\tau = -1$ führt und auf Grund von $\varkappa^\tau = \varkappa$ schließlich $-1 \in \mathfrak{K}_1$ ergibt. Mit $a \in \mathfrak{K}_1$, $a \neq 0$, ist a^{-1}, $a' \in \mathfrak{K}_1$: Es sei τ die Proportionalität, die 1 in a überführt und es sei σ die Inversion, die 1 festhält. Wegen $(\infty, 0, 1)^\tau = (\infty, 0, a)$ ist also $\mathfrak{K}_1^\tau = \mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_1^{\tau^{-1}} = \mathfrak{K}_1$. Die Abbildung τ ist auch durch $y = ax$ gegeben; dies bedeutet $(a^{-1})^\tau = 1$ bzw. $1^{\tau^{-1}} = a^{-1}$, was $a^{-1} \in \mathfrak{K}_1$ ergibt. Wegen $(\infty, 0, 1)^\sigma = (0, \infty, 1)$ ist $\varkappa^\sigma = \varkappa$; wegen $a' = a^\sigma$ ist also $a' \in \mathfrak{K}_1$.

Auf Grund des semiassoziativen Gesetzes ist

$$((-1) + 1) + a = \bar{a}(-1) + (1 + a)$$

bzw.

$$-a = \bar{a} - (1 + a).$$

Dies ergibt mit der Hilfsformel (b)

$$-a + (1 + a) = \bar{a}.$$

$\bar{a} \in \mathfrak{K}_1$ für $0 \neq a \in \mathfrak{K}_1$ ergibt sich aus der folgenden Behauptung, wenn man $-1 \in \mathfrak{K}_1$ und $-a = (-1)\,a$ beachtet:

Mit $a, b \in \mathfrak{K}_1$ ist $a + b$, $ab \in \mathfrak{K}_1$: Diese letztere Behauptung ist für $a = 0$ oder für $b = 0$ trivial. Sei $a \neq 0$, $b \neq 0$. Sei ferner τ die Proportionalität, die 1 in a überführt. Wegen $\mathfrak{K}_1^\tau = \mathfrak{K}_1$ und $ab = b^\tau$ ist also $ab \in \mathfrak{K}_1$. Sei jetzt ϱ die Haupttranslation, die 0 nach b überführt. Dann ist also $a + b = a^\varrho$. Nun setzt sich ϱ zusammen aus der Involution ι, die ∞ und 0 festläßt (nach 4. 1. 2 ist also $\mathfrak{K}_1^\iota = \mathfrak{K}_1$ für den Fall, daß T von 1. Art ist; ist T von 2. Art, so muß ι die Identität sein und man hat dann ebenfalls $\mathfrak{K}_1^\iota = \mathfrak{K}_1$) und aus der Symmetrie σ, die 0 nach b überführt. Wegen $(\infty, 0, b)^\sigma = (\infty, b, 0)$ ist $\mathfrak{K}_1^\sigma = \mathfrak{K}_1$; damit ist $\mathfrak{K}_1^\varrho = \mathfrak{K}_1^{\iota\sigma} = \mathfrak{K}_1^\sigma = \mathfrak{K}_1$ und also $a + b = a^\varrho \in \mathfrak{K}_1$ für $a \in \mathfrak{K}_1$.

4. 1. 4. *Sei p ein Punkt, der nicht auf $\varkappa \equiv (\infty\, 0\, 1)$ liegt. Dann ist der Kreis durch p, der $\varkappa$ in ∞ berührt, gegeben durch ∞ und durch alle Punkte x mit $x = \gamma + p$, $\gamma \in \mathfrak{K}_1$. Ist allgemeiner q ein Punkt, der nicht auf dem Kreis $(\infty a_0 a_1)$, $\infty \neq a_0 \neq a_1 \neq \infty$, liegt, so ist der Kreis durch q, der $(\infty a_0 a_1)$ in ∞ berührt, durch ∞ und durch alle x mit $x = [(a_1 - a_0)\,\gamma + (q - a_0)] + a_0$, $\gamma \in \mathfrak{K}_1$, gegeben.*

Beweis. Der Kreis $(\infty\, p\; 1+p)$ berührt $\varkappa$ in ∞: Sei $\tau \in T$ die Abbildung mit $(\infty, 0, 1)^\tau = (\infty, p, 1+p)$. Die Abbildung τ ist auch gegeben durch $y = x + p$. Da $\varkappa^\tau = (\infty p\; 1+p)$ sein muß, ist $(\infty\, p\; 1+p) = \{\infty, x \mid x = \gamma + p,\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}$. Gäbe es nun ein $\delta \in \mathfrak{K}_1$ mit $\delta \in \varkappa \cap (\infty p\; 1+p)$, so wäre also $\delta = \gamma_0 + p$ für ein gewisses $\gamma_0 \in \mathfrak{K}_1$. Gewiß ist denn $\gamma_0 \neq 0$. Es folgt $\gamma_0^{-1}\delta = 1 + \gamma_0^{-1}p$. Sei σ die Involution mit $\infty^\sigma = \infty$, $(-1)^\sigma = \gamma_0^{-1}\delta$. ($\sigma$ ist auch eindeutig bestimmt, wenn $-1 = \gamma_0^{-1}\delta$ ist. Dies ist klar, wenn T von 1. Art ist; im anderen Falle folgt $\sigma = v$.) Es gilt $\varkappa^\sigma = \varkappa$: Für $-1 = \gamma_0^{-1}\delta$ folgt dies aus 4. 1. 2; für $-1 \neq \gamma_0^{-1}\delta$ kommt die Behauptung aus $(\infty, -1, \gamma_0^{-1}\delta)^\sigma = (\infty, \gamma_0^{-1}\delta, -1)$ unter Beachtung von $-1, \gamma_0^{-1}\delta \in \varkappa$. Die Abbildung σ ist auch gegeben durch $y = -x + \gamma_0^{-1}p$. Denn $y = -x + \gamma_0^{-1}p$ überführt ∞ nach ∞, -1 nach $\gamma_0^{-1}\delta$; außerdem ist $x = -y + \gamma_0^{-1}p$. Nun gilt $\gamma_0^{-1}p = 0^\sigma \in \varkappa^\sigma = \varkappa$, d. h. $\gamma_0^{-1}p \in \mathfrak{K}_1$, d. h. $p \in \mathfrak{K}_1$. Wdspr. Der Kreis $(\infty\, p\; 1+p) = \{\infty, x \mid x = \gamma + p,\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}$ berührt also tatsächlich $\varkappa$ in ∞.

Um nun den durch q gehenden Kreis zu bestimmen, der $(\infty\, a_0\, a_1)$ im Punkt ∞ berührt, betrachten wir die Abbildung ϱ mit $(\infty, a_0, a_1)^\varrho = (\infty, 0, 1)$, die sich auch in der Form $y = (a_1 - a_0)^{-1}(x - a_0)$ anschreiben läßt. Gegenüber ϱ geht $(\infty\, a_0\, a_1)$ in $\varkappa$ über und q in $(a_1 - a_0)^{-1}(q - a_0)$. Der Berührkreis durch $(a_1 - a_0)^{-1}(q - a_0)$, ∞ an $\varkappa$ ist also gegeben durch $\{\infty, x \mid x = \gamma + (a_1 - a_0)^{-1}(q - a_0),\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}$; gegenüber ϱ^{-1} geht er über in

$$\{\infty, x \mid x = (a_1 - a_0)\,[\gamma + (a_1 - a_0)^{-1}(q - a_0)] + a_0,\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}$$

bzw. in

$$\{\infty, x \mid x = [(a_1 - a_0)\,\gamma + (q - a_0)] + a_0,\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}.$$

4. 1. 5. *Der Kreis durch die verschiedenen Punkte ∞, a_0, a_1 ist identisch mit der Punktmenge*

$$\{\infty, x \mid x = (a_1 - a_0)\,\gamma + a_0,\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}.$$

Beweis. Über die Abbildung τ, $(\infty, 0, 1)^\tau = (\infty, a_0, a_1)$, die auch in der Form $y = (a_1 - a_0)\,x + a_0$ angeschrieben werden kann, folgt dies sofort wegen $\varkappa^\tau = (\infty\, a_0\, a_1)$.

4. 1. 6. *$\mathfrak{K}_2$ ist quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$.*

Beweis. Da nicht alle Punkte von Σ auf $\varkappa$ liegen, ist $\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1 \neq \emptyset$. Seien nun i, z feste Elemente aus $\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$. Wir zeigen, daß es eindeutig bestimmte Größen $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}_1$ mit $z = (\alpha + i)\,\beta$ gibt. — Sei ζ der Kreis durch $(\infty, 0, z)$. Sei λ der Kreis durch i, der $\varkappa = (\infty\, 0\, 1)$ in ∞ berührt und sei schließlich μ der Kreis mit $i \in \mu \in \zeta_\infty$. Wegen $z, i \notin \varkappa$ gibt es eindeutig bestimmte Punkte $r, m \neq \infty$, $r \neq 0$ mit $\lambda \cap \zeta = \{\infty, r\}$ und $\mu \cap \varkappa = \{\infty, m\}$. Wegen $r \in \lambda$ ist $r = \gamma_0 + i$ nach 4. 1. 4 für ein gewisses $\gamma_0 \in \mathfrak{K}_1$. Wegen $r \in \zeta$ ist $r = z\gamma_1$ nach 4. 1. 5 für ein gewisses $\gamma_1 \in \mathfrak{K}_1$; aus $r \neq 0$ folgt $\gamma_1 \neq 0$. Es ergibt sich $z\gamma_1 = \gamma_0 + i$, d. h. $z = (\alpha + i)\,\beta$ für $\alpha \equiv \gamma_0$, $\beta = \gamma_1^{-1}$.

4 1. 7. *Der Kreis durch die verschiedenen Punkte a, b, c ist gegeben durch*

$$(abc) = \left\{ x \;\middle|\; \begin{bmatrix} a & b \\ x & c \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 \cup \{\infty\} \right\}.$$

Beweis. Dies folgt, wenn wir gezeigt haben: Das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten a, b, c, d liegt dann und nur dann in $\mathfrak{K}_1$, wenn a, b, c, d konzyklisch ist. Dies wiederum folgt, wenn wir nachgewiesen haben:

4. 1. 8. *Es seien a, b, c, d verschiedene Punkte. Stellt dann τ die Abbildung aus T dar mit $(\infty, 0, 1)^\tau = (a, b, c)$, so ist $\left(\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}\right)^\tau = d$* [16].

[16]) 4. 1. 8 gilt allgemein, wenn ein Titsfeld $\mathfrak{K}$ zugrunde gelegt wird; wir machen hier also keinen Gebrauch von den geometrischen Eigenschaften von Σ.

Beweis. Fall $a = \infty$. Die Abbildung τ wird dann gegeben durch $y = (c - b)\,x + b$; weiterhin gilt $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = (c - b)^{-1}(d - b)$. Tatsächlich ist nun

$$[(c - b)^{-1}(d - b)]^{\tau} = (c - b)\,[(c - b)^{-1}(d - b)] + b = (d - b) + b = d.$$

Fall $a \neq \infty$. Die Abbildung τ ist jetzt gegeben durch

$$y = ([(c - a)' - (b - a)']\,x + (b - a)')' + a,$$

wenn man die Rechenregeln betreffend ∞ mit zugrundelegt. Wegen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \frac{1}{[(c - a)' - (b - a)']}\,[(d - a)' - (b - a)']$$

ist

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}\right)^{\tau} = \left([(c - a)' - (b - a)']\,\frac{1}{[(c - a)' - (b - a)']}\,[(d - a)' - (b - a)'] + (b - a)'\right)' + a$$
$$= ([(d - a)' - (b - a)'] + (b - a)')' + a.$$

Für $d \neq \infty$ folgt weiter $\left(\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}\right)^{\tau} = (d - a)'' + a = (d - a) + a$; dieser Schluß kann auch für $b = \infty$ durchgeführt werden, da ja dann $(b - a)' = 0$ ist. Für $d = \infty$ gilt

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}\right)^{\tau} = ([0 - (b - a)'] + (b - a)')' + a = 0' + a = \infty + a = \infty = d.$$

Wir kommen jetzt zur Umkehrung des Satzes 4. 1. Seien dazu $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ Titsfelder mit $\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1 = 2$. Sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{K}_2 \cup \{\infty\}$ gesetzt; der Kreis durch die drei verschiedenen Punkte a, b, c werde über (D) erklärt. Die so definierte Kreisebene heiße Σ. Mit T bezeichnen wir die auf $\mathfrak{P}$ minimal dreifach transitive Gruppe der Substitutionen $y = ax + b$ und $y = a(x + b)' + c$, $0 \neq a \in \mathfrak{K}_2$, $b, c \in \mathfrak{K}_2$.

4. 1. 9. *Sind a, b, c, d, e verschiedene Punkte, so gilt*

$$(1) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ e & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ e & c \end{bmatrix}.$$

Sind a, b, c, d verschiedene Punkte und ist $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = p$ — wie bei der Definition des Doppelverhältnisses angemerkt, hat man $p \neq \infty, 0, 1$ —, so ist

$$(2) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = p^{-1},$$

$$(3) \quad \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = -p + 1,$$

$$(4) \quad \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = p'.$$

(5) *Sind a, b, c verschiedene Punkte und ist $p \in \mathfrak{K}_2 - \{0, 1\}$, so gibt es genau einen Punkt $d \neq a, b, c$ mit $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = p$.*

Beweis. (1) und (2) folgen sofort aus der Definition des Doppelverhältnisses. Zu (3): Seien τ, σ Abbildungen aus T mit $(\infty, 0, 1)^{\tau} = (a, b, c)$ und $(\infty, 0, 1) = (\infty, 1, 0)^{\sigma}$. Dann ist $(\infty, 0, 1)^{\sigma^{-1}\tau} = (a, c, b)$. Nach 4. 1. 8 gilt hiermit

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}\right)^{\tau} = d \text{ und } \left(\begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}\right)^{\sigma^{-1}\tau} = d.$$

Setzen wir $\begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = q$, so hat man also $q^{\sigma^{-1}\tau} = d = p^{\tau}$, was $q^{\sigma^{-1}} = p$ bzw. $q = p^{\sigma}$ ergibt. Die Abbildung σ ist durch $y = -x + 1$ gegeben. Dies ergibt $q = -p + 1$, d. h. (3).

Zum Beweise von (4) seien τ, σ Abbildungen aus T mit $(\infty, 0, 1)^\tau = (a, b, c)$ und $(\infty, 0, 1) = (0, \infty, 1)^\sigma$. Man hat $(\infty, 0, 1)^{\sigma^{-1}\tau} = (b, a, c)$. Nach 4. 1. 8 ist $\left(\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}\right)^{\sigma^{-1}\tau} = d$. Es folgt — sei $\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = q$ gesetzt — $q^{\sigma^{-1}\tau} = d = p^\tau$ und hieraus $q = p^\sigma$. Da σ durch $y = x'$ dargestellt wird, gilt $q = p'$, d. h. (4). Zu (5): Ist τ durch $(\infty, 0, 1)^\tau = (a, b, c)$ bestimmt, so hat man $d = p^\tau$. Wegen $p \neq \infty, 0, 1$ ist $p^\tau \neq a, b, c$.

4. 1. 10. *Σ bildet eine $[H]$-Ebene.*

Beweis. In den Bezeichnungen von [4] ist

$$(\mathfrak{K}_2 \cup \{\infty\};\ \mathfrak{K}_2 - \{0, 1\} > \mathfrak{K}_1 - \{0, 1\};\ \sigma), \quad \sigma(a\,b\,c\,d) = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix},$$

ein allgemeines Kreisquaternar (sogar ein $\alpha\beta\gamma$-Kreisquaternar), wie leicht aus 4. 1. 9, (1) bis (5), folgt. Dann zeigt Satz 1_2, [4], unsere Behauptung.

4. 1. 11. *Die Abbildungen von T sind sämtlich Kreisverwandtschaften von Σ.*

Beweis. Seien a, b, c, d vier verschiedene Punkte und sei τ eine Abbildung aus T. Wir bilden die Abbildung $\sigma \in T$ mit $(\infty, 0, 1)^\sigma = (a, b, c)$. Wird $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = p$ gesetzt, so ist also $p^\sigma = d$ nach 4. 1. 8. Nun gilt $(\infty, 0, 1, p)^{\sigma\tau} = (a^\tau, b^\tau, c^\tau, d^\tau)$ und also nach 4. 1. 8

$$\begin{bmatrix} a^\tau & b^\tau \\ d^\tau & c^\tau \end{bmatrix} = p = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}.$$

Konzyklische Punktequadrupel gehen also bei Ausübung von τ in konzyklische Punktequadrupel über und nicht konzyklische in nicht konzyklische.

4. 1. 12. *Aus $a^2 = 1$ folgt $a = +1$ oder $a = -1$.*

Beweis. Gewiß gilt $a \neq 0$. Dann betrachten wir die Abbildung $y = ax$, die ∞ und 0 festläßt und für die $ay = a(ax) = a^2x = x$ erfüllt ist. Ist T von 2. Art, so muß also $y = ax$ die Identität $y = x$ sein, was $x = ax$ für alle x ergibt und speziell $a = 1$ für $x = 1$ bedeutet. Im anderen Falle gibt es genau eine Involution, die ∞ und 0 als Fixpunkte besitzt und die von der Identität verschieden ist, nämlich $y = -x$. Ist also $y = ax$ nicht die Identität, d. h. hat man $a \neq 1$, so folgt $-x = y = ax$, d. h. $a = -1$ für $x = 1$.

4. 1. 13. *Aus $-1 = 1 + q$ und $q \in \mathfrak{K}_2$ folgt $q \in \mathfrak{K}_1$.*

Beweis. Angenommen, q wäre nicht Element von $\mathfrak{K}_1$. Dann ist auch $-q \notin \mathfrak{K}_1$ und $-q - 1 \notin \mathfrak{K}_1$: Aus $-q = \gamma_0 \in \mathfrak{K}_1$ folgte $q = (-1)\,\gamma_0 \in \mathfrak{K}_1$; aus $-q - 1 = \gamma \in \mathfrak{K}_1$ folgte $(-q-1) + 1 = \gamma + 1 \in \mathfrak{K}_1$, d. h. $-q \in \mathfrak{K}_1$. Damit hat man $\mathfrak{K}_1 \ni -q - 1 = -q + (1 + q) = \bar{q}$ auf Grund des semiassoziativen Gesetzes $q = ((-1) + 1) + q = \bar{q}(-1) + (1 + q)$. Mit Hilfe dieses Gesetzes ist weiter $((-q - 1) + 1) + q = \bar{q}(-q - 1) + (1 + q)$, d. h. $0 = +\bar{q}(-q - 1) - 1$ oder $+1 = +\bar{q}(-q - 1)$.

Mit $\bar{q} = -q - 1$ folgt $1 = \bar{q}^2$. Nun ergibt 4. 1. 12 hieraus $\bar{q} \in \{1, -1\} < \mathfrak{K}_1$, d. h. $\bar{q} \in \mathfrak{K}_1$; es war aber $\bar{q} \notin \mathfrak{K}_1$ nachgewiesen.

4. 1. 14. *Σ genügt dem Berührsatz.*

Beweis. Auf Grund von 4. 1. 11 brauchen wir nur zu zeigen, daß durch den Punkt $p \notin (\infty\,0\,1) \equiv \varkappa$ genau ein Kreis λ geht mit $\lambda \cap \varkappa = \{\infty\}$. Aber $\{\infty, x \mid x = \gamma + p,\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}$ ist ein Kreis durch p, der $\varkappa$ in ∞ berührt. Andernfalls gäbe es ein $\delta \in \varkappa - \{\infty\}$ mit $\delta = \gamma_0 + p$, $\gamma_0 \in \mathfrak{K}_1$. Da in diesem Falle sicherlich $\gamma_0 \neq 0$ sein muß, hat man $\gamma_0^{-1}\delta = 1 + \gamma_0^{-1}p$. Wegen $p \notin \mathfrak{K}_1$, d. h. auch $\gamma_0^{-1}p \notin \mathfrak{K}_1$ ist $\gamma_0^{-1}\delta \neq -1$ nach 4. 1. 13. Sei τ die Abbildung mit $(\infty, -1, \gamma_0^{-1}\delta)^\tau = (\infty, \gamma_0^{-1}\delta, -1)$, die auch durch $y = -x + \gamma_0^{-1}p$

gegeben ist. Es folgt also $\varkappa^\tau = \varkappa$ und $\gamma_0^{-1} p = 0^\tau \in \varkappa - \{\infty\} = \mathfrak{K}_1$. Widerspruch. Neben $\lambda = \{\infty, x \mid x = \gamma + p,\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}$ gibt es keinen weiteren Kreis durch p, der $\varkappa$ in ∞ berührt: Angenommen, es gäbe doch einen Kreis $\mu \neq \lambda$ mit $\mu \cap \varkappa = \infty$. Sei $q \in \mu - \lambda$. Dann ist $q - p \notin \mathfrak{K}_1$, da im Falle $q - p = \gamma \in \mathfrak{K}_1$ sich $q = \gamma + p \in \lambda$ ergäbe. Wegen $\infty \neq p \notin \mathfrak{K}_1$ ist weiter $-p \notin \mathfrak{K}_1$. Da $\mathfrak{K}_2$ quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ ist, so gibt es also Größen $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}_1$ mit

$$(q - p) = (\alpha + (-p))\,\beta.$$

Wegen $q - p \notin \mathfrak{K}_1$ ist $\beta \neq 0$. Damit hat man $(q - p)\,\beta^{-1} + p = \alpha$. Es sei nun τ die Abbildung aus T mit $(\infty, 0, 1)^\tau = (\infty, p, q)$, die auch durch $y = (q - p)\,x + p$ gegeben wird. Wegen $\varkappa^\tau = \mu$ ist

$$\mu = \{\infty, x \mid x = (q - p)\,\gamma + p,\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}.$$

Setzt man $\gamma = \beta^{-1}$, so sieht man, daß $\alpha \in \mu \cap \varkappa - \{\infty\}$ ist; μ berührt also nicht $\varkappa$ in ∞. Widerspruch.

Damit ist Satz 4. 1 vollends bewiesen.

§ 5. Hinzunahme des Axioms von Süss.

Die Algebraisierung von $[M]$-Ebenen mit einer Winkelvergleichung in der Stärke (I) bis (IV).

Im folgenden Satz untersuchen wir den Einfluß des Axioms von Süss auf die (in § 4 betrachteten) Koordinatenstrukturen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$:

Satz 5. 1. 1. *Es sei Σ eine Möbiusebene, die eine auf den Punkten dreifach transitive Gruppe von Kreisverwandtschaften besitzt. Gilt dann zusätzlich das Axiom von Süss, so ist die multiplikative Gruppe von $\mathfrak{K}_1$ Normalteiler der multiplikativen Gruppe von $\mathfrak{K}_2$. Sind umgekehrt $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ Titsfelder mit $\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1 = 2$ und so, daß $\mathfrak{K}_1^*$ Normalteiler von $\mathfrak{K}_2^*$ ist, so gibt es in der nach Satz 4. 1 konstruierten Möbiusebene eine auf den Punkten dreifach transitive Gruppe von Kreisverwandtschaften, die dem Axiom von Süss genügt.*

Anmerkung: Man beachte, daß Satz 5. 1. 1 auf Grund der Sätze 3. 1, 3. 2 verschärft werden kann.

Beweis. Sei Σ eine Möbiusebene mit einer auf den Punkten minimal dreifach transitiven Gruppe T von Kreisverwandtschaften. Dann gibt es nach Satz 4. 1 Titsfelder $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ mit $\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1 = 2$. Die Punkte von Σ werden repräsentiert durch $\mathfrak{K}_2 \cup \{\infty\}$; der Kreis durch die drei verschiedenen Punkte a, b, c ist gegeben durch

$$(abc) = \left\{x \,\middle|\, \begin{bmatrix} a & b \\ x & c \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 \cup \{\infty\}\right\}.$$

Es seien nun k, u beliebige Elemente mit $k \in \mathfrak{K}_1^*$ und $u \in \mathfrak{K}_2^*$. Dann gilt $u^{-1}ku \in \mathfrak{K}_1^*$, wenn T dem Axiom von Süss genügt: Seien $\varkappa, \lambda$ die Kreise $\varkappa = (\infty\, 0\, 1)$, $\lambda = (\infty\, 0\, u)$. Es ist also

$$\lambda = (\infty\, 0\, u) = \left\{x \,\middle|\, \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ x & u \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 \cup \{\infty\}\right\} = \{\infty, x \mid x = u\gamma,\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}.$$

Da wegen $k \in \mathfrak{K}_1^*$ die Abbildung $\tau : y = kx$ den Kreis $\varkappa$ in sich überführt und da $\infty^\tau = \infty$, $0^\tau = 0$ ist, so folgt $\lambda^\tau = \lambda$ auf Grund des Axioms von Süss. Es ist also $u^\tau \in \lambda$, d. h. es ist $ku = u\gamma$ für ein $\gamma \in \mathfrak{K}_1^*$, wenn man $0 \neq u$ und folglich $0^\tau \neq u^\tau$ beachtet. Damit ist tatsächlich $u^{-1}ku = \gamma \in \mathfrak{K}_1^*$.

Sind nun umgekehrt $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ Titsfelder mit $\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1 = 2$, so sei Σ die nach Satz 4. 1 konstruierte Möbiusebene; T sei die nach Satz 4. 1 konstruierte — auf den Punkten

von Σ — minimal dreifach transitive Gruppe von Kreisverwandtschaften. Ist $\mathfrak{K}_1^*$ Normalteiler von $\mathfrak{K}_2^*$, so gilt das Axiom von Süss: Dies ist gezeigt auf Grund von Satz 3. 1, wenn wir bewiesen haben (vgl. (4) in Satz 3. 1): Für jeden Kreis λ und für jede Abbildung $\tau \in T$ mit $\infty, 0 \in \lambda \neq \varkappa = (\infty\, 0\, 1)$ und $(\varkappa, \infty, 0)^\tau = (\varkappa, \infty, 0)$ gilt $\lambda^\tau = \lambda$. — Die Abbildung τ ist auch gegeben durch $y = kx$, wo k ein gewisses Element aus $\mathfrak{K}_1^*$ darstellt. Ist $u \in \lambda - \varkappa$, so haben wir

$$\lambda = \left\{x \,\middle|\, \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ x & u \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 \cup \{\infty\}\right\} = \{\infty, x \mid x = u\gamma,\ \gamma \in \mathfrak{K}_1\}.$$

Die Abbildung τ überführt nun den Punkt u von λ in ku. Wegen $ku = uu^{-1}ku$ und wegen $u^{-1}ku \in \mathfrak{K}_1^*$ ist $ku \in \lambda$. Damit gilt $(\infty, 0, u)^\tau = (\infty, 0, ku \in \lambda)$ und weiter also $\lambda^\tau = \lambda$.

Im folgenden Satz kennzeichnen wir die Möbiusebenen im engeren Sinne, in denen eine Winkelvergleichung mit den Eigenschaften (I) bis (IV) (s. § 2) gegeben ist.

Satz 5. 1. 2. *Es sei Σ eine Möbiusebene im engeren Sinne, die eine Winkelvergleichung in der Stärke* (I) *bis* (IV) *gestattet. Dann gibt es Titsfelder $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) *$\mathfrak{K}_2$ ist quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$,*

(2) *$\mathfrak{K}_1^*$ ist Normalteiler von $\mathfrak{K}_2^*$,*

(3) *Die Menge der Punkte von Σ kann durch $\mathfrak{K}_2 \cup \{\infty\}$ repräsentiert werden,*

(4) *Der Kreis durch die verschiedenen Punkte a, b, c ist durch*

$$(abc) = \left\{x \,\middle|\, \begin{bmatrix} a & b \\ x & c \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 \cup \{\infty\}\right\}$$

gegeben.

(5) *Sind α, β verschiedene Kreise durch die verschiedenen Punkte s, s', sind γ, δ Kreise durch den Punkt t, so ist genau dann $(\alpha\beta; s) = (\gamma\delta; t)$, wenn $\gamma \cap \delta = \{t, t'\}$, $t' \neq t$, ist und wenn es Punkte $a \in \alpha - \beta$, $b \in \beta - \alpha$, $c \in \gamma - \delta$, $d \in \delta - \gamma$ gibt mit*

$$\begin{bmatrix} s & s' \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & t' \\ d & c \end{bmatrix}.$$

Sind α, β Kreise durch den Punkt s mit $\beta \in \alpha_s$, sind γ, δ Kreise durch den Punkt t, so ist genau dann $(\alpha\beta; s) = (\gamma\delta; t)$, wenn $\delta \in \gamma_t$ gilt.

(6) *Die Winkelgruppe $\mathfrak{W}$ von Σ ist isomorph der Faktorgruppe $\mathfrak{K}_2^* / \mathfrak{K}_1^*$.*

Sind umgekehrt Titsfelder $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ mit den Eigenschaften (1), (2) *gegeben, so bilden die durch* (3), (4) *eingeführten Kreisebenen Möbiusebenen im engeren Sinne, die — unter Zugrundelegung der Definition* (5) *— eine Winkelvergleichung in der Stärke* (I) *bis* (IV) *gestatten.*

Beweis. Sei Σ eine Möbiusebene im engeren Sinne, die eine Winkelvergleichung in der Stärke (I) bis (IV) gestattet. Dann ist nach Satz 2. 6 die Gruppe T der Kreisverwandtschaften, die jeden freien Winkel invariant lassen, minimal dreifach transitiv auf den Punkten von Σ. Auf Grund der Sätze 2. 1, 2. 2 genügt T dem Axiom von Süss. Mit Hilfe der Sätze 4.1, 5.1.1 erkennt man dann die Eigenschaften (1), (2), (3), (4). Zu (5): Seien α, β verschiedene Kreise durch die verschiedenen Punkte s, s' und seien γ, δ Kreise durch den Punkt t mit $(\alpha\beta; s) = (\gamma\delta; t)$. Es kann nicht $\delta \in \gamma_t$ sein, da sonst nach Hilfssatz 2.2 auch $\beta \in \alpha_s$ sein müßte. Es gibt also einen Punkt $t' \neq t$ mit $\gamma \cap \delta = \{t, t'\}$. Es seien nun a, b, c Punkte mit $a \in \alpha - \beta$, $b \in \beta - \alpha$, $c \in \gamma - \delta$ und es sei $d \neq t, t', c$ der nach 4.1.9 eindeutig bestimmte Punkt mit $\begin{bmatrix} s & s' \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & t' \\ d & c \end{bmatrix}$. Ist τ die Abbildung aus T mit $(s, s', a)^\tau = (t, t', c)$, so ist also $b^\tau = d$. Wegen $(\gamma(tt'd); t) \equiv (\alpha^\tau\beta^\tau; s^\tau) = (\alpha\beta; s) = (\gamma\delta; t)$ ist $\delta = (tt'd)$ nach

Hilfssatz 2. 1 und damit $d \in \delta$; wegen $d \neq t, t'$ ist schließlich $d \in \delta - \gamma$. — Seien nun umgekehrt α, β verschiedene Kreise durch die verschiedenen Punkte s, s' und γ, δ verschiedene Kreise durch die verschiedenen Punkte t, t'. Seien ferner a, b, c, d Punkte mit $a \in \alpha - \beta$, $b \in \beta - \alpha$, $c \in \gamma - \delta$, $d \in \delta - \gamma$ und $\begin{bmatrix} s & s' \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & t' \\ d & c \end{bmatrix}$. Dann gilt $(\alpha\beta; s) = (\gamma\delta; t)$: Beachtet man, daß eine Abbildung τ aus T existiert mit

$$(s, s', a, b)^\tau = (t, t', c, d),$$

so ist dies bereits bewiesen.

(6) folgt aus (5) unter Beachtung der Rechenregeln 4. 1. 9 (s. §§ 2, 3 in [4]).

Zum Beweis der Umkehrung! Die den Titsfeldern $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ entspringende Möbiusebene im engeren Sinne besitzt nach Satz 5. 1. 1 eine minimal dreifach transitive Gruppe von Kreisverwandtschaften, die dem Axiom von Süss genügt. Auf Grund der Sätze 3. 1, 2. 8 gestattet Σ eine Winkelvergleichung in der Stärke (I) bis (IV). Diese Winkelvergleichung ist aber identisch mit der durch (5) gegebenen, da Doppelverhältnisse Invarianten von T sind.

Wegen eines nichttrivialen Beispieles vergleiche man § 3.

§ 6. Eine Kennzeichnung der euklidischen Möbiusebenen.

Begründungstheoretisch können die Möbiusebenen als eine gewisse Endstufe aufgefaßt werden, die durch einen euklidischen Körper $\mathfrak{K}_1$ und durch die (im Kommutativen einzig mögliche) quadratische Erweiterung (im klassischen Sinn) $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(\sqrt{-1})$ erklärt werden. (Dabei ist ein euklidischer Körper ein angeordneter Körper, in dem jedes positive Element Quadrat ist.) Wir nennen solche Möbiusebenen *euklidische Möbiusebenen.* Ist $E(\mathfrak{K}_1)$ die affine Ebene über $\mathfrak{K}_1$, so läßt sich ein Kreis $\varkappa$, der nicht Gerade von $E(\mathfrak{K}_1)$ ist, als Menge der Punkte (x_1, x_2), $x_1, x_2 \in \mathfrak{K}_1$, mit $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$, $0 < r \in \mathfrak{K}_1$, auffassen, wo $m = (m_1, m_2)$, $m_1, m_2 \in \mathfrak{K}_1$, ein eindeutig dem Kreis $\varkappa$ zugeordneter Punkt, der „Mittelpunkt", ist, und wo $r > 0$ ebenfalls eindeutig $\varkappa$ als „Radius" zugewiesen ist. Definiert man als Abstand der Punkte $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ den Wert

$$|x, y| = \underset{+}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}$$

(der Radikand der Wurzel ist nichtnegativ, also Quadrat), so sieht man, daß für jeden Punkt x des Kreises $\varkappa$

$$|x, m| = r$$

gilt. Von jedem Punkt $p \notin \varkappa$, der nicht innerhalb von $\varkappa$ liegt, lassen sich genau zwei Tangenten (d. h. Kreise durch ∞, p, die $\varkappa$ berühren) legen; ist b ein Berührpunkt, so gilt

$$|p, b|^2 = |m, p|^2 - r^2.$$

(Da $|m, p| > r$ ist, gilt $|m, p|^2 > r^2$, d. h. $|m, p|^2 - r^2 > 0$; damit existiert

$$\underset{+}{\sqrt{|m, p|^2 - r^2}} \equiv r_1;$$

schneidet man nun $\varkappa$ mit dem Kreis, der den Mittelpunkt p und den Radius r_1 besitzt, so kommt man zu den beiden Berührpunkten.)

Es gilt der Sekantentangentensatz: Unter der Potenz des Punktes p bzgl. $\varkappa$ wird der Ausdruck $|m, p|^2 - r^2$ verstanden. Ist nun λ eine orientierte Gerade durch p, die $\varkappa$ in den Punkten s, t schneidet, so ist die Potenz von p gleich dem Produkt der gemäß der Orientierung von λ mit Vorzeichen zu versehenden Größen $|p, s|$, $|p, t|$.

Die von Ewald [8] axiomatisch begründeten Möbiusebenen sind genau die euklidischen Möbiusebenen ([6]). Wir geben im folgenden Satz eine andere Kennzeichnung für euklidische Möbiusebenen.

Satz 6. 1. *Sei Σ eine Möbiusebene. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Σ gestattet eine minimal dreifach transitive Gruppe T von Kreisverwandtschaften so, daß jede Abbildung τ von T wenigstens einen Fixpunkt besitzt.*

(2) *Σ ist euklidisch.*

Beweis. Daß (1) aus (2) folgt, kann leicht nachgewiesen werden. Es folgt aber auch (2) aus (1):

6. 1. 1. *Sind a, b, c, d verschiedene Punkte, so gibt es eine Abbildung τ aus T mit $(a, b, c, d)^\tau = (b, a, d, c)$.*

Beweis[17]. Ist σ die Abbildung aus T mit $(a, b, c)^\sigma = (b, a, d)$, so beachte man, daß es einen Punkt p mit $p^\sigma = p$ gibt. Es ist gewiß $p \neq a, b, c, d$. Wegen $(b, c, p)^{\sigma^2} = (b, c, p)$ ist σ^2 die Identität. Daraus folgt $d^\sigma = c^{\sigma^2} = c$. Es kann also $\tau = \sigma$ gesetzt werden.

Auf Grund von 6. 1. 1 kann nachgewiesen werden, daß Addition und Multiplikation des Bereiches $\mathfrak{K}_2$ von Satz 4. 1 kommutativ sind und daß $a' = \dfrac{1}{a}$ ist für alle $a \neq 0$ aus $\mathfrak{K}_2$ (Petkantschin [13]), Tits [16].

Damit ist $\mathfrak{K}_2$ nach Satz 4. 1 im klassischen Sinne kommutative quadratische Erweiterung des kommutativen Körpers $\mathfrak{K}_1$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{K}_1$ euklidischer Körper ist:

6. 1. 2. *Die Charakteristik von $\mathfrak{K}_1$ ist von 2 verschieden.*

Beweis. Wir nehmen Charakteristik $\mathfrak{K}_1 = 2$ an.

Fall a): $\mathfrak{K}_2$ ist separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$. Ist i ein Element aus $\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$, so folgt aus $(\mathfrak{K}_2 : \mathfrak{K}_1) = 2$

$$i^2 = \alpha + \beta i \text{ für Größen } \alpha, \beta \in \mathfrak{K}_1.$$

Wegen $i \notin \mathfrak{K}_1$ hat man $\alpha \neq 0$; da $\mathfrak{K}_2$ separable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$ ist, so gilt $\beta \neq 0$. Sei nun τ die Abbildung aus T mit $(\infty, 0, 1)^\tau = \left(0, \dfrac{\alpha}{\beta^3} i, \infty\right)$ und sei $\gamma + \delta i$, $\gamma, \delta \in \mathfrak{K}_1$, ein (nach (1) vorhandener) Fixpunkt von τ. Sicherlich ist $\gamma + \delta i \neq \infty$, $0, 1, \dfrac{\alpha}{\beta^3} i$. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 \\ \gamma + \delta i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\alpha}{\beta^3} i \\ \gamma + \delta i & \infty \end{bmatrix}$$

bzw. (man beachte $2 = 0$ und $-1 = 1$)

$$(\delta\beta^2)^2 = \alpha + \beta(\delta\beta^2).$$

Damit wäre aber $x^2 = \alpha + \beta x$ gar nicht irreduzibel gewesen.

Fall b): $\mathfrak{K}_2$ ist inseparable quadratische Erweiterung von $\mathfrak{K}_1$. Ist dann $i \in \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$, so hat man $i^2 = \alpha \in \mathfrak{K}_1$. Man betrachte die Abbildung τ mit $(\infty, 0, 1)^\tau = (0, \infty, i)$, die den Fixpunkt $\gamma + \delta i$ haben möge. Gewiß ist $\gamma + \delta i \neq \infty, 0, 1, i$. Es folgt

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 \\ \gamma + \delta i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \gamma + \delta i & i \end{bmatrix}$$

bzw.

$$i = \gamma^2 + \delta^2 i^2 = \gamma^2 + \delta^2 \alpha \in \mathfrak{K}_1. \quad \text{Widerspruch.}$$

[17]) Nachgebildet einem Beweis von W. Süss.

6. 1. 3. *Die multiplikative Gruppe $\mathfrak{K}_1^*$ von $\mathfrak{K}_1$ zerfällt nach der Untergruppe $\mathfrak{Q}$ der Quadrate in genau zwei verschiedene Klassen.*

Beweis. Da die Charakteristik von $\mathfrak{K}_1$ von 2 verschieden ist, gibt es ein $j \in \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1$ mit $j^2 \equiv \alpha \in \mathfrak{K}_1$. Dann gilt $\mathfrak{K}_1^* = \mathfrak{Q} \cup \alpha\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q} \cap \alpha\mathfrak{Q} = \emptyset$: Ist $\beta \in \mathfrak{K}_1^* - \mathfrak{Q}$, so haben wir $\beta \in \alpha\mathfrak{Q}$ nachzuweisen. Wegen $\beta \neq 1$ besitzt die Abbildung τ mit $(\infty, 0, 1)^\tau = (0, \infty, \beta)$ einen Fixpunkt $\gamma + \delta j \neq \infty, 0, 1$. Aus

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 \\ \gamma + \delta j & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \gamma + \delta j & \beta \end{bmatrix}$$

folgt

$$\gamma^2 + \delta^2\alpha + 2\gamma\delta j = \beta;$$

damit ist

$$\gamma^2 + \delta^2\alpha = \beta, \; 2\gamma\delta = 0.$$

Im Falle $\delta = 0$ hätte man $\beta = \gamma^2 \in \mathfrak{Q}$, was $\beta \in \mathfrak{K}_1^* - \mathfrak{Q}$ widerspricht. Es folgt also $\gamma = 0$ und $\beta = \alpha\delta^2 \in \alpha\mathfrak{Q}$.

6. 1. 4. *Es ist $-1 \in \mathfrak{K}_1^* - \mathfrak{Q}$; damit kann $\mathfrak{K}_2$ aus $\mathfrak{K}_1$ durch Adjunktion einer Nullstelle von $x^2 + 1 = 0$ gewonnen werden: $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1(i \mid i^2 = -1)$.*

Beweis. Wir benutzen die im Beweis von 6. 1. 3 eingeführten Größen j, α. Dann besitzt die Abbildung τ mit $(\infty, 0, 1)^\tau = (0, \infty, j)$ einen Fixpunkt $\gamma + \delta j \neq \infty, 0, 1, j$. Aus

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 \\ \gamma + \delta j & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \gamma + \delta j & j \end{bmatrix}$$

folgt

$$\gamma^2 + \delta^2\alpha + 2\gamma\delta j = j,$$

was

$$\gamma^2 + \delta^2\alpha = 0 \text{ und } 2\gamma\delta = 1$$

ergibt. Es ist also $\gamma \neq 0$ und $\delta \neq 0$ und weiter

$$-1 = \alpha\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 \in \alpha\mathfrak{Q}.$$

6. 1. 5. *$\mathfrak{K}_1$ ist ein euklidischer Körper.*

Beweis. Genau die Elemente q von $\mathfrak{Q}$ werden positiv genannt, in Zeichen $q > 0$, und genau die Elemente r von $(-1)\mathfrak{Q}$ heißen negativ, in Zeichen $r < 0$. Damit folgt sofort das Trichotomiegesetz. Weiter gilt $ab > 0$ für $a, b \in \mathfrak{K}_1$ dann und nur dann, wenn entweder $a > 0$, $b > 0$ oder aber wenn $a < 0$, $b < 0$ ist; dies folgt aus 6. 1. 3. — Ist $a > 0$ und $b > 0$ für $a, b \in \mathfrak{K}_1$, so gilt $a + b > 0$: Es gibt Größen $\mu, \nu \in \mathfrak{K}_1 - \{0\}$ mit $a = \mu^2$, $b = \nu^2$ wegen $a, b \in \mathfrak{Q}$. Man hat $a + b \neq 0$, da sonst $-1 = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 \in \mathfrak{Q}$ sein müßte, was 6.1.4 widerspricht. Die Abbildung τ mit $(\infty, 0, 1)^\tau = (0, \infty, \mu + \nu i)$ — es sei i die nach 6. 1. 4 eingeführte Größe — besitzt einen Fixpunkt $\gamma + \delta i \neq \infty, 0, 1, \mu + \nu i$. Aus

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 \\ \gamma + \delta i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \infty \\ \gamma + \delta i & \mu + \nu i \end{bmatrix}$$

folgt

$$\gamma^2 - \delta^2 + 2\gamma\delta i = \mu + \nu i$$

bzw.

$$\mu = \gamma^2 - \delta^2 \text{ und } \nu = 2\gamma\delta.$$

Hiermit ist

$$a + b = \mu^2 + \nu^2 = (\gamma^2 + \delta^2)^2 \in \mathfrak{Q} \cup \{0\}$$

bzw. wegen $a + b \neq 0$ sogar $a + b \in \mathfrak{Q}$, d. h. $a + b > 0$.

§ 7. Über $[H]$-Ebenen.

Wir knüpfen hier unmittelbar an die Untersuchungen [15] von W. Süss an. Dabei legen wir allerdings nicht den anschaulichen Raum und eine in ihn eingebettete Kugelfläche F zugrunde, sondern allgemein eine $[H]$-Ebene Σ. (Eine solche $[H]$-Ebene wird ja gebildet von den Punkten der Kugelfläche F und den Kurven aus $\mathfrak{k}$.)

Es soll nun Σ eine minimal dreifach transitive Gruppe T von Kreisverwandtschaften gestatten derart, daß jede Abbildung von T wenigstens einen Fixpunkt besitzt. Für die so umrissenen $[H]$-Ebenen Σ gilt der

Satz 7. 1. *Σ genügt dem Satz von Miquel. T erfüllt das Axiom von Süss. Es gibt einen kommutativen Körper $\mathfrak{K}_2$ und einen Bereich $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}_2$, so daß die Menge der Punkte von Σ identifiziert werden kann mit $\mathfrak{K}_2$ und einem weiteren Element ∞ und daß der Kreis durch die drei verschiedenen Punkte a, b, c gegeben ist durch*

$$(abc) = \left\{ x \;\middle|\; \begin{bmatrix} a & b \\ x & c \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}_1 \cup \{\infty\} \right\}.$$

Dabei ist $\mathfrak{K}_1$ ein Unterkörper von $\mathfrak{K}_2$ oder aber $\mathfrak{K}_1$ besteht nur aus den Elementen $0, 1 \in \mathfrak{K}_2$. Die Gruppe T ist isomorph der Gruppe der Substitutionen

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathfrak{K}_2.$$

In Σ läßt sich fernerhin eine Winkelvergleichung einführen, die Äquivalenzrelation ist und die dem Satz über den Sehnentangentenwinkel, dem Satz über die Winkelsumme im Kreisdreieck und der Eigenschaft der Abtragbarkeit genügt (s. [4], S. 57).

Beweis. Auf den Fall, daß alle Punkte gemeinsam auf einem Kreise liegen, gehen wir nicht ein. Wir setzen also voraus, daß es mindestens vier nicht gemeinsam auf einem Kreise gelegene Punkte gibt.

Sind a, b, c, d und a', b', c', d' je vier verschiedene Punkte, so setzen wir (ohne dabei an die vorhergegangenen Paragraphen anzuknüpfen) $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ d' & c' \end{bmatrix}$, wenn es eine Abbildung $\tau \in T$ mit $a^\tau = a'$, $b^\tau = b'$, $c^\tau = c'$ $d^\tau = d'$ gibt. (Vgl. Bemerkung zu Satz 1_1 in [4].) Nach Satz 1_1 [4] sieht man, daß ein allgemeines Kreisquaternar vorliegt. Man hat sogar ein $\alpha\beta\gamma\pi$-Kreisquaternar: Die Axiome Q 0, Q 1, Q 2 folgen sofort aus der minimal dreifachen Transitivität von T. Weiterhin gilt $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ a & b \end{bmatrix}$ für je vier verschiedene Punkte (vgl. hierzu 6. 1. 1).

Damit können wir die in [4] gewonnenen Ergebnisse benutzen. In Σ gilt der Satz von Miquel (Satz 4 und Korollar zu Satz 4 in [4]); man entnimmt die angegebene Beschreibung von Σ über die Bereiche $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ den Sätzen 28, 28′ in Verbindung mit einer zu Satz 28 gemachten Bemerkung. Die Isomorphie der Gruppe T mit der Gruppe der Substitutionen

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathfrak{K}_2,$$

ist leicht einzusehen, wenn man der Abbildung $\tau \in T$ mit $(k, l, m)^\tau = (\infty, 0, 1)$ die Substitution

$$w = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ w & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & l \\ z & m \end{bmatrix}$$

zuordnet. Die Existenz der behaupteten Winkelvergleichung entnimmt man den §§ 2, 3 in [4]. T genügt dem Axiom von Süss: Da T eine dreifach transitive Gruppe von Kreisverwandtschaften darstellt, kann man folgende spezielle Situation annehmen:

$$s = \infty,\ a = 0,\ b = 1,$$

wo b ein fester Punkt $\neq \infty, 0$ auf $\varkappa'$ ist. Ist nun irgendeine Abbildung τ aus T mit $(\infty, 0, \varkappa)^\tau = (\infty, 0, \varkappa)$ gegeben und ist k ein fester Punkt $\neq \infty, 0$ auf $\varkappa$, so gilt $\begin{bmatrix} \infty & 0 \\ w & k^\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ z & k \end{bmatrix}$ für $w \equiv z^\tau$.

Man hat also

$$w = \frac{k^\tau}{k} z \text{ für } z \neq \infty.$$

Wegen $k^\tau \neq \infty, 0$ ist τ für $k = k^\tau$ die Identität. Dann ist aber nichts zu beweisen. Wir können $k \neq k^\tau$ annehmen. Nun gilt wegen $\varkappa^\tau = \varkappa$

$$\begin{bmatrix} \infty & k \\ k^{\tau^2} & k^\tau \end{bmatrix} = \varrho \in \mathfrak{K}_1, \text{ d. h. } k^{\tau^2} = k(1 - \varrho) + k^\tau \varrho.$$

Auf Grund von $w = z^\tau = \frac{k^\tau}{k} z$ gilt weiter $k^{\tau^2} = \frac{k^\tau}{k} k^\tau$.

Zusammengefaßt hat man

$$(k^\tau)^2 = k^2(1 - \varrho) + kk^\tau \varrho;$$

hieraus folgt

$$(k^\tau - k)\,[k^\tau + k(1 - \varrho)] = (k^\tau)^2 - kk^\tau + kk^\tau(1 - \varrho) - k^2(1 - \varrho) = 0.$$

Wegen $0 \neq k \neq k^\tau \neq 0$ ergibt sich

$$0 \neq \frac{k^\tau}{k} = \varrho - 1 \in \mathfrak{K}_1;$$

die Abbildung $w = z^\tau$ hat somit die Form $w = (\varrho - 1)\, z$ und $z = \infty \to w = \infty$, $0 \neq \varrho - 1 \in \mathfrak{K}_1$. Diese Abbildung überführt aber $\varkappa' = \mathfrak{K}_1 \cup \{\infty\}$ in sich.

Eingegangen 18. September 1959.

Quasi-präkompakte Endomorphismen und ein Ergodensatz in lokalkonvexen Vektorräumen.

Von *Albrecht Pietsch* in Berlin.

Einleitung.

Ein beschränkter Endomorphismus A eines Banachraumes heißt bekanntlich *quasi-kompakt* (= *quasi-vollstetig*), wenn es eine natürliche Zahl n und einen kompakten Endomorphismus K gibt, so daß $\| A^n - K \| < 1$ gilt. Diese vor allem von K. Yosida und S. Kakutani ([7], [16], [18]) untersuchten Abbildungen haben in der Ergodentheorie ziemliche Bedeutung erlangt.

In der vorliegenden Arbeit werden ähnliche Endomorphismen in allgemeinen (vollständigen und separierten) *komplexen lokalkonvexen Vektorräumen* studiert. Da in unserem Falle für stetige Endomorphismen keine Norm erklärt werden kann, wird die bisher in Banachräumen verwendete Definition der quasi-kompakten Endomorphismen hinfällig. Die von uns an Stelle dieser Abbildungen betrachteten *quasi-präkompakten stetigen Endomorphismen* scheinen auf den ersten Blick von völlig anderer Natur zu sein. Trotzdem erhalten wir fast die gleichen Aussagen, — ja, wir können sogar zeigen, daß beide Definitionen in Banachräumen zusammenfallen.

Es erweist sich als günstig, neben den quasi-präkompakten stetigen Endomorphismen noch eine weitere Klasse von Endomorphismen zu betrachten. Wir bezeichnen einen stetigen Endomorphismus T als *R-Endomorphismus*, wenn für alle Abbildungen $T_\lambda = I - \lambda T$ mit $|\lambda| \leqq 1$ die wesentlichsten Aussagen der Rieszschen Theorie der kompakten Endomorphismen gelten.

Unsere Ausführungen gliedern sich in vier Abschnitte. Zuerst zeigen wir, daß jeder quasi-präkompakte stetige Endomorphismus eines vollständigen und separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes ein R-Endomorphismus ist. Dabei können wir mit entsprechender Modifikation die Grundgedanken der Beweise von F. Riesz [11], J. Leray [9] und J. H. Williamson [15] übernehmen.

Im zweiten Abschnitt geben wir eine Spektraldarstellung für R-Endomorphismen an. Ähnliche Untersuchungen in Banachräumen findet man bereits bei F. Ruston [13].

Für beschränkte Endomorphismen eines Banachraumes stellen wir im dritten Abschnitt die Verbindung zu den quasi-kompakten Endomorphismen her. Außerdem wird gezeigt, daß jeder beschränkte R-Endomorphismus eines separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes quasi-präkompakt ist.

Schließlich benutzen wir die gewonnenen Ergebnisse im vierten Abschnitt zur Herleitung eines *Ergodensatzes*. Ist $\mathcal{L}(E)$ die Gesamtheit der stetigen Endomorphismen eines separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes E und ist T ein R-Endo-

morphismus von E, so wird für eine umfangreiche Klasse von Topologien auf $\mathcal{L}(E)$ gezeigt, daß die Aussagen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}[\lambda T + \lambda^2 T^2 + \cdots + \lambda^n T^n] = P_\lambda$ für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n} T^n\right] = 0$ äquivalent sind. Eine wesentliche Verschärfung dieses Satzes erhalten wir für quasi-präkompakte stetige Endomorphismen. Die bisher bekannten Ergebnisse von M. Altmann [2] beziehen sich nur auf die schwache Topologie.

Es sei bemerkt, daß wir uns im allgemeinen der Bourbakischen Terminologie anschließen. Eine Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Vektorräume findet man in [4]. Die verwendeten Sätze der Filtertheorie sind aus [3] entnommen.

1. Quasi-präkompakte stetige Endomorphismen.

Wir beginnen unsere Ausführungen mit der Definition der quasi-präkompakten Abbildungen.

Definition 1. *Eine Abbildung A eines komplexen lokalkonvexen Vektorraumes E in sich heißt quasi-präkompakt, wenn in E eine Nullumgebung W existiert, so daß es zu jeder Nullumgebung U von E eine natürliche Zahl p und endlich viele Elemente $y_i \in E$ gibt, für die*

$$A^p(W) \subset \bigcup \{y_i + U\}$$

gilt.

Im folgenden sei E stets ein *vollständiger und separierter komplexer lokalkonvexer Vektorraum*, A ein *quasi-präkompakter stetiger Endomorphismus* von E und W eine zu A gehörige spezielle *absolutkonvexe Nullumgebung* von E, mit den in unserer Definition geforderten Eigenschaften.

Ist T ein beliebiger Endomorphismus von E, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}(T)$ den *Nullraum* und mit $\mathfrak{B}(T)$ den *Bildraum* von T. Der Endomorphismus T heißt *offen*, wenn er jede Nullumgebung von E in eine Nullumgebung von $\mathfrak{B}(T)$ transformiert.

Im weiteren benötigen wir die beiden folgenden Hilfssätze, die man etwa in [4] und [15] findet. Es sei erwähnt, daß man eine Teilmenge M eines komplexen lokalkonvexen Vektorraumes als *präkompakt* bezeichnet, wenn sich M für jede Nullumgebung U durch endlich viele Mengen der Form $x + U$ überdecken läßt.

Hilfssatz 1. *Ein separierter komplexer lokalkonvexer Vektorraum, in dem es eine präkompakte Nullumgebung gibt, ist endlichdimensional.*

Hilfssatz 2. *Ist U eine Nullumgebung eines komplexen lokalkonvexen Vektorraumes und hat man für ein Element x die Beziehungen $x \overline{\in} U$, so gibt es eine reelle Zahl r mit $0 < r < 1$, für die $rx \in U$ und $rx \overline{\in} \frac{1}{2} U$ gilt.*

Im folgenden untersuchen wir für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ die Abbildungen $A_\lambda = I - \lambda A$. Aus dem anschließend bewiesenen Satz ergibt sich, daß wir uns dabei vielfach auf den Fall $\lambda = 1$ beschränken können, weil sich alle Aussagen über $I - A$ durch die Substitution $A' = \lambda A$ auf $I - A' = I - \lambda A$ übertragen lassen.

Satz 1. *Die Abbildung λA ist für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ quasi-präkompakt.*

Beweis. Weil W absolutkonvex ist, gilt $[\lambda A]^p(W) \subset A^p(W) \subset \bigcup \{y_i + U\}$.

Wir beweisen nun, daß der Endomorphismus $I - A$ offen ist. Dazu benötigen wir

Hilfssatz 3. *Ist das Bild $[I - A](\mathfrak{F})$ des Ultrafilters $\mathfrak{F}$ konvergent und gilt $W \in \mathfrak{F}$, so konvergiert auch $\mathfrak{F}$.*

Beweis. Wir zeigen, daß es zu jeder absolutkonvexen Nullumgebung U von E eine Menge $F \in \mathfrak{F}$ gibt, so daß für ein geeignetes Element $x \in E$ die Beziehung $F \subset x + 2U$ gilt. Dann ist $\mathfrak{F}$ ein Cauchy-Filter, der wegen der Vollständigkeit von E konvergiert.

Zu U gibt es eine natürliche Zahl p und endlich viele Elemente $y_i \in E$, so daß $A^p(W) \subset \bigcup \{y_i + U\}$ gilt. Das Bild $A^p(\mathfrak{F})$ ist eine Ultrafilterbasis. Wegen $W \in \mathfrak{F}$ gehört die Menge $\bigcup \{y_i + U\}$ und somit wenigstens eine der Mengen $y_i + U$ zu dem durch $A^p(\mathfrak{F})$ erzeugten Ultrafilter. Folglich existiert eine Menge $F_1 \in \mathfrak{F}$ mit

$$A^p(F_1) \subset x_1 + U, \tag{1}$$

wobei x_1 eines der Elemente y_i ist. Weil $[I - A](\mathfrak{F})$ konvergiert, ist

$$[I - A^p](\mathfrak{F}) = [I + A + \cdots + A^{p-1}]\,[I - A](\mathfrak{F})$$

ein Cauchy-Filter. Es gibt deshalb eine Menge $F_2 \in \mathfrak{F}$, so daß für ein geeignetes Element $x_2 \in E$

$$[I - A^p](F_2) \subset x_2 + U \tag{2}$$

gilt. Somit ergibt sich für $F = F_1 \cap F_2$ aus (1) und (2) die Aussage

$$F \subset x_1 + x_2 + 2U.$$

Satz 2. *Der Endomorphismus $H = I - A$ ist offen.*

Beweis. Wir wollen annehmen, daß es in E eine absolutkonvexe Nullumgebung U gibt, deren Bild $H(U)$ keine Nullumgebung im Bildraum von H ist. Dabei können wir voraussetzen, daß $U \subset W$ gilt. Dann hat man, wenn V eine beliebige absolutkonvexe Nullumgebung von E ist, die Beziehung $V \cap \mathfrak{B}(H) \not\subset H(U)$, woraus sich $H^{-1}(V) \not\subset U + \mathfrak{N}(H)$ ergibt. Wir bestimmen nun ein Element $\tilde{y} \in H^{-1}(V)$ mit $\tilde{y} \notin U + \mathfrak{N}(H)$. Nach Hilfssatz 2 kann man dazu ein Element $y = r\tilde{y}$ mit $0 < r < 1$ finden, für das $y \in H^{-1}(V)$, $y \in U + \mathfrak{N}(H)$ und $y \notin \frac{1}{2} U + \mathfrak{N}(H)$ gilt. Aus $y \in U + \mathfrak{N}(H)$ ergibt sich die Darstellung $y = x + a$ mit $x \in U$ und $a \in \mathfrak{N}(H)$. Folglich hat man $Hx \in V$, $x \in U$ und $x \notin \frac{1}{2} U + \mathfrak{N}(H)$.

Wir setzen nun

$$F(V) = \{x : Hx \in V,\ x \in U,\ x \notin \tfrac{1}{2} U + \mathfrak{N}(H)\}.$$

Nach dem bisher Bewiesenen ist $F(V)$ niemals leer. Wegen

$$F(V_1 \cap V_2) = F(V_1) \cap F(V_2)$$

bildet das System der Mengen $F(V)$, wenn V alle absolutkonvexen Nullumgebungen von E durchläuft, eine Filterbasis, zu der es einen Ultrafilter $\mathfrak{F}$ mit $F(V) \in \mathfrak{F}$ gibt. Wegen $H(F(V)) \subset V$ konvergiert $H(\mathfrak{F})$ gegen 0. Aus $F(V) \subset U \subset W$ entnimmt man $W \in \mathfrak{F}$. Deshalb ist $\mathfrak{F}$ nach Hilfssatz 3 konvergent, und für den Limes x_0 gilt $H(x_0) = 0$. Da sich andererseits aus $F(V) \cap \{\frac{1}{2} U + \mathfrak{N}(H)\} = \emptyset$ gerade $x_0 \notin \mathfrak{N}(H)$ ergibt, muß die ursprüngliche Annahme, daß H nicht offen ist, falsch sein.

Als nächstes beweisen wir Aussagen über den Nullraum und den Bildraum der Abbildung $I - A$.

Satz 3. *Der Nullraum des Endomorphismus $H = I - A$ ist endlichdimensional.*

Beweis. Die Menge $W_0 = \mathfrak{N}(H) \cap W$ ist eine Nullumgebung in $\mathfrak{N}(H)$, und es gilt $W_0 = A(W_0)$. Daraus folgt $W_0 = A^p(W_0) \subset A^p(W)$. Ist nun U eine beliebige Nullumgebung von E, so läßt sich $A^p(W)$ nach Voraussetzung für eine geeignete natürliche Zahl p durch endlich viele Mengen der Form $x + U$ überdecken. Deshalb ist W_0 präkompakt, und aus Hilfssatz 1 ergibt sich, daß $\mathfrak{N}(H)$ endlichdimensional ist.

Satz 4. *Der Bildraum des Endomorphismus $H = I - A$ ist abgeschlossen und endlichcodimensional.*

Beweis. Nach Satz 2 ist die durch H induzierte Abbildung von $E/\mathfrak{N}(H)$ auf $\mathfrak{B}(H)$ ein topologischer Isomorphismus. Da $N(H)$ endlichdimensional ist, weiß man, daß der Quotientenraum $E/\mathfrak{N}(H)$ vollständig sein muß. Dasselbe gilt dann auch für $\mathfrak{B}(H)$. Der Bildraum von H ist demnach abgeschlossen.

Wir zeigen nun, daß das kanonische Bild von W in $E/\mathfrak{B}(H)$ präkompakt ist. Weil $E/\mathfrak{B}(H)$ separiert ist, folgt daraus nach Hilfssatz 1, daß der betrachtete Quotientenraum endlichdimensional sein muß.

Ist U eine beliebige Nullumgebung von E, so gibt es eine natürliche Zahl p und endlich viele Elemente $y_i \in E$ mit $A^p(W) \subset \bigcup \{y_i + U\}$. Auf Grund der Beziehung

$$W + \mathfrak{B}(H) = A^p(W) + \mathfrak{B}(H),$$

die sich aus der Identität $I - A^p = H[I + A + \cdots + A^{p-1}]$ ergibt, hat man

$$W + \mathfrak{B}(H) \subset \bigcup \{y_i + U + \mathfrak{B}(H)\}.$$

Definition 2. *Ein stetiger Endomorphismus T eines separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes heißt σ-Transformation, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:*

a) *Der Endomorphismus T ist offen.*

b) *Der Nullraum von T ist endlichdimensional.*

c) *Der Bildraum von T ist abgeschlossen und endlichcodimensional.*

Damit ergibt sich

Satz 5. *Der Endomorphismus $H = I - A$ ist eine σ-Transformation.*

Die Klasse der σ-Transformationen wurde in [5], [10] und [14] ausführlich untersucht. Aus den dort gewonnenen Ergebnissen erhält man

Satz 6. *Die Endomorphismen $H^n = [I - A]^n$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ sind σ-Transformationen*[1]).

Der im Anschluß bewiesene Hilfssatz bereitet den für die folgenden Endlichkeitsbeweise fundamentalen Hilfssatz 5 vor.

Hilfssatz 4. *Wenn M und M' abgeschlossene Unterräume von E mit $M \subset M'$ und $M \neq M'$ sind, für die $[I - A](M') \subset M$ gilt, dann gibt es ein Element $x \in M' \cap W$ mit $A^n x \,\overline{\in}\, M + \frac{1}{2}W$ für $n = 0, 1, \ldots$.*

Beweis. Aus $[I - A](M') \subset M$ ergibt sich $A(M) \subset M$, und auf Grund der Identität $I = [I - A][I + A + \cdots + A^{k-1}] + A^k$ hat man $M' \subset M + A^k(M')$ für $k = 1, 2, \ldots$. Wir wollen nun annehmen, daß $M' \subset M + W$ gilt. Dann ergibt sich $A^k(M') \subset A^k(M) + A^k(W) \subset M + A^k(W)$. Daraus folgt $M' \subset M + A^k(W)$. Ist U eine beliebige absolutkonvexe Nullumgebung von E, so gibt es eine natürliche Zahl p und endlich viele Elemente $y_i \in E$, so daß die Beziehung $A^p(W) \subset \bigcup \{y_i + U\}$ gilt. Für eine positive Zahl α mit $y_i \in \alpha U$ ergibt sich deshalb $M' \subset M + (\alpha + 1)\, U$. Folglich hat man $M' \subset M + U$. Weil M abgeschlossen ist, erhält man daraus die falsche Aussage $M' \subset M$. Unsere Annahme $M' \subset M + W$ kann demnach nicht richtig sein, und es gibt ein Element $\tilde{y} \in M'$ mit $\tilde{y} \,\overline{\in}\, M + W$. Nach Hilfssatz 2 existiert dann ein Element $y = r\tilde{y}$ mit $0 < r < 1$, so daß $y \,\overline{\in}\, M + \frac{1}{2}W$ und $y \in M + W$ gilt. Wenn man y in der Form $y = a + x$ mit $a \in M$ und $x \in W$ darstellt, hat man $x \in M' \cap W$ und $x \,\overline{\in}\, M + \frac{1}{2}W$. Wegen $x - A^n x \in M$ ergibt sich schließlich $A^n x \,\overline{\in}\, M + \frac{1}{2}W$ für $n = 0, 1, \ldots$.

[1]) Wir setzen fest: $H^0 = I$.

Hilfssatz 5. *Ist $\{M_n : n = 0, 1, \ldots\}$ eine wachsende bzw. fallende Folge von abgeschlossenen Unterräumen aus E, zu der es eine Folge von komplexen Zahlen λ_n mit $|\lambda_n| \leqq 1$ gibt, so daß die Beziehungen*

$$[I - \lambda_n A](M_{n+1}) \subset M_n \text{ bzw. } [I - \lambda_n A](M_n) \subset M_{n+1}$$

gelten, dann existiert eine Zahl n_0 mit $M_{n_0} = M_{n_0+1}$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine natürliche Zahl p und endlich viele Elemente $y_i \in E$ mit $A^p(W) \subset \bigcup \{y_i + \frac{1}{4} W\}$. Im weiteren wollen wir den Fall der wachsenden Folge behandeln und nehmen an, daß stets $M_n \neq M_{n+1}$ gilt. Weil der Endomorphismus $\lambda_n A$ quasi-präkompakt ist, gibt es nach Hilfssatz 4 zu jeder Zahl n ein Element $x_n \in M_{n+1} \cap W$ mit $[\lambda_n A]^p(x_n) \overline{\in} M_n + \frac{1}{2} W$. Wegen $|\lambda_n| \leqq 1$ hat man auch $A^p(x_n) \overline{\in} M_n + \frac{1}{2} W$. Aus der Beziehung $A^p(x_m) \in M_{m+1} \subset M_n$ für $n \geqq m + 1$ erhält man die Aussage $A^p(x_n) - A^p(x_m) \overline{\in} \frac{1}{2} W$. Daraus folgt, daß niemals zwei Elemente $A^p(x_n)$ und $A^p(x_m)$ mit $n \neq m$ in einer Menge $y_i + \frac{1}{4} W$ liegen können. Wegen $x_n \in W$ hat man aber $A^p(x_n) \subset \bigcup \{y_i + \frac{1}{4} W\}$ für $n = 0, 1, \ldots$. Folglich muß die ursprüngliche Annahme falsch sein, und es gibt eine Zahl n_0 mit $M_{n_0} = M_{n_0+1}$.

Satz 7. *Es gibt eine nicht negative ganze Zahl n_0, so daß für alle Zahlen $n \geqq n_0$ die Nullräume der Endomorphismen $H^n = [I - A]^n$ gleich sind.*

Beweis. Wenn wir $M_n = \mathfrak{N}(H^n)$ setzen, gilt $M_n \subset M_{n+1}$ und $H(M_{n+1}) \subset M_n$. Nach Hilfssatz 5 gibt es dann eine nicht negative ganze Zahl n_0 mit $M_{n_0} = M_{n_0+1}$. Aus $\mathfrak{N}(H^{n_0}) = \mathfrak{N}(H^{n_0+1})$ ergibt sich durch Induktion $\mathfrak{N}(H^n) = \mathfrak{N}(H^{n_0})$ für $n \geqq n_0$.

Satz 8. *Es gibt eine nicht negative ganze Zahl m_0, so daß für alle Zahlen $n \geqq m_0$ die Bildräume der Endomorphismen $H^n = [I - A]^n$ gleich sind.*

Beweis. Wenn wir $M_n = \mathfrak{B}(H^n)$ setzen, gilt $M_n \supset M_{n+1}$ und $H(M_n) \subset M_{n+1}$. Nach Hilfssatz 5 gibt es dann eine nicht negative ganze Zahl m_0 mit $M_{m_0} = M_{m_0+1}$. Aus $\mathfrak{B}(H^{m_0}) = \mathfrak{B}(H^{m_0+1})$ ergibt sich durch Induktion $\mathfrak{B}(H^n) = \mathfrak{B}(H^{m_0})$ für $n \geqq m_0$.

Satz 9. *Der Endomorphismus A besitzt nur endlich viele verschiedene Eigenwerte λ_j mit $|\lambda_j| \leqq 1$.*

Beweis. Es sei $\{\lambda_n : n = 0, 1, \ldots\}$ eine Folge von verschiedenen Eigenwerten mit $|\lambda_n| \leqq 1$. Zu jedem λ_n gibt es dann eine nichttriviale Eigenlösung x_n. Wenn wir für $n \geqq 1$ unter M_n den durch die linear unabhängigen Elemente $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ aufgespannten Unterraum von E verstehen, so gilt $M_n \subset M_{n+1}$ und $[I - \lambda_n A](M_{n+1}) \subset M_n$. Da man aber stets $M_n \neq M_{n+1}$ hat, ergibt sich nach Hilfssatz 5 ein Widerspruch.

2. Spektraldarstellung von *R*-Endomorphismen.

Die im folgenden betrachteten Endomorphismen sind gerade so definiert, daß sie die wichtigsten Eigenschaften der quasi-präkompakten Endomorphismen besitzen.

Definition 3. *Ein stetiger Endomorphismus T eines komplexen lokalkonvexen Vektorraumes heißt R-Endomorphismus, wenn für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ die wesentlichsten Aussagen der Rieszschen Theorie gelten:*

a) *Der Endomorphismus $T_\lambda = I - \lambda T$ ist eine σ-Transformation*[2]).

b) *Es gibt eine nicht negative ganze Zahl $n(\lambda)$, so daß für alle Zahlen $n \geqq n(\lambda)$ die Nullräume von T_λ^n gleich sind.*

---

[2]) Vgl. Definition 2.

c) *Es gibt eine nicht negative ganze Zahl $m(\lambda)$, so daß für alle Zahlen $n \geqq m(\lambda)$ die Bildräume von T_λ^n gleich sind.*

d) *Der Endomorphismus T besitzt nur endlich viele verschiedene Eigenwerte λ_j mit $|\lambda_j| \leqq 1$.*

Auf Grund der obigen Bemerkung ergibt sich

Theorem 1. *Jeder quasi-präkompakte stetige Endomorphismus eines vollständigen und separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes ist ein R-Endomorphismus.*

Um die nun folgenden Aussagen beweisen zu können, müssen wir voraussetzen, daß der zugrunde liegende komplexe lokalkonvexe Vektorraum E separiert ist.

Hilfssatz 6. *Ist T ein R-Endomorphismus von E, so gibt es zu jeder komplexen Zahl λ mit $|\lambda| \leqq 1$ einen stetigen Projektor P_λ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Es gilt $\mathfrak{B}(P_\lambda) = \mathfrak{N}(T_\lambda^n)$ für $n \geqq n(\lambda)$ und $\mathfrak{N}(P_\lambda) = \mathfrak{B}(T_\lambda^n)$ für $n \geqq m(\lambda)$.*

b) *Die Endomorphismen T und P_λ sind vertauschbar.*

c) *Der Endomorphismus $I - \lambda T + \lambda T P_\lambda$ ist ein topologischer Automorphismus von E.*

d) *Für $\lambda \neq \mu$ gilt $P_\lambda P_\mu = 0$.*

Beweis. Im folgenden sei λ eine feste komplexe Zahl mit $|\lambda| \leqq 1$. Wir wählen nun eine beliebige natürliche Zahl s mit $s \geqq m(\lambda) + n(\lambda)$ und behaupten, daß E direkte Summe von $\mathfrak{N}(T_\lambda^s)$ und $\mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ ist. Zum Beweis müssen wir zeigen, daß $E = \mathfrak{N}(T_\lambda^s) + \mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ und $\mathfrak{N}(T_\lambda^s) \cap \mathfrak{B}(T_\lambda^s) = \{0\}$ gilt.

Ist x ein beliebiges Element aus E, so gibt es wegen $T_\lambda^s x \in \mathfrak{B}(T_\lambda^s) = \mathfrak{B}(T_\lambda^{2s})$ ein $y \in E$ mit $T_\lambda^s x = T_\lambda^{2s} y$. Wenn man $u = x - T_\lambda^s y$ und $v = T_\lambda^s y$ setzt, so gilt $u \in \mathfrak{N}(T_\lambda^s)$ und $v \in \mathfrak{B}(T_\lambda^s)$. Wegen $x = u + v$ hat man folglich $x \in \mathfrak{N}(T_\lambda^s) + \mathfrak{B}(T_\lambda^s)$.

Zu einem Element $x \in \mathfrak{N}(T_\lambda^s) \cap \mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ existiert ein $y \in E$ mit $x = T_\lambda^s y$. Daraus folgt $y \in \mathfrak{N}(T_\lambda^{2s}) = \mathfrak{N}(T_\lambda^s)$, und man erhält $x = 0$.

Weil $\mathfrak{N}(T_\lambda^s)$ endlichdimensional und $\mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ abgeschlossen ist, muß der Projektor

$$P_\lambda x = u = x - T_\lambda^s y$$

stetig sein.

a) Wegen $\mathfrak{N}(T_\lambda^s) = \mathfrak{N}(T_\lambda^{n(\lambda)})$ und $\mathfrak{B}(T_\lambda^s) = \mathfrak{B}(T_\lambda^{m(\lambda)})$ hat man

$$\mathfrak{B}(P_\lambda) = \mathfrak{N}(T_\lambda^{n(\lambda)}) = \mathfrak{N}(T_\lambda^n) \text{ für } n \geqq n(\lambda)$$

und

$$\mathfrak{N}(P_\lambda) = \mathfrak{B}(T_\lambda^{m(\lambda)}) = \mathfrak{B}(T_\lambda^n) \text{ für } n \geqq m(\lambda).$$

b) Aus $T[\mathfrak{N}(T_\lambda^s)] \subset \mathfrak{N}(T_\lambda^s)$ und $T[\mathfrak{B}(T_\lambda^s)] \subset \mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ ergibt sich $TP_\lambda = P_\lambda T$.

c) Wir zeigen nun, daß der Unterraum $\mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ durch T_λ^s und damit auch durch T_λ eineindeutig und topologisch auf sich selbst abgebildet wird. Weil die Einschränkung von $I - \lambda T + \lambda T P_\lambda$ auf $\mathfrak{N}(T_\lambda^s)$ bzw. auf $\mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ mit I bzw. T_λ zusammenfällt, ergibt sich daraus die Behauptung, daß $I - \lambda T + \lambda T P_\lambda$ ein topologischer Automorphismus von E ist.

Wegen $\mathfrak{N}(T_\lambda^s) \cap \mathfrak{B}(T_\lambda^s) = \{0\}$ ist T_λ^s auf $\mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ eineindeutig. Ist y ein beliebiges Element aus $\mathfrak{B}(T_\lambda^s) = \mathfrak{B}(T_\lambda^{2s})$, so bestimmen wir ein $z \in E$ mit $y = T_\lambda^{2s} z$. Dann gelten mit $x = T_\lambda^s z$ die Aussagen $x \in \mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ und $y = T_\lambda^s x$. Folglich ist T_λ^s eine Abbildung von $\mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ auf sich. Schließlich hat man für eine beliebige Nullumgebung U_0 von $\mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ die Beziehung $T_\lambda^s(U_0) = T_\lambda^s(U_0 + \mathfrak{B}(P_\lambda))$. Weil T_λ^s offen ist, muß $T_\lambda^s(U_0)$ eine Nullumgebung in $\mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ sein, denn $U_0 + \mathfrak{B}(P_\lambda)$ ist eine Nullumgebung in E.

d) Es seien nun λ und μ verschiedene komplexe Zahlen mit $|\lambda|, |\mu| \leqq 1$. Dann wählen wir eine natürliche Zahl s mit $s \geqq m(\lambda) + m(\mu) + n(\lambda) + n(\mu)$. Weil die Poly-

nome $(1-\lambda t)^s$ und $(1-\mu t)^s$ relativ prim sind, gibt es Polynome $p_\lambda(t)$ und $p_\mu(t)$ mit

$$p_\lambda(t)\,(1-\lambda t)^s + p_\mu(t)\,(1-\mu t)^s \equiv 1.$$

Setzt man in dieser Identität für t den Endomorphismus T ein, so ergibt sich für $x \in \mathfrak{N}(T_\mu^s)$ die Beziehung $T_\lambda^s \cdot p_\lambda(T)\,x = x$, und man hat $x \in \mathfrak{B}(T_\lambda^s)$. Somit gilt $\mathfrak{B}(P_\mu) = \mathfrak{N}(T_\mu^s) < \mathfrak{B}(T_\lambda^s) = \mathfrak{N}(P_\lambda)$. Daraus folgt aber $P_\lambda P_\mu = 0$.

Theorem 2. *Ist T ein R-Endomorphismus eines separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes, so kann T in der Form*

$$T = R + \sum_{|\lambda| \leq 1} TP_\lambda = R + \sum_j TP_{\lambda_j}$$

dargestellt werden. Dabei gelten die folgenden Aussagen:

a) *Die Endomorphismen P_λ sind für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ stetige Projektoren mit endlichdimensionalem Bildraum.*

b) *Für alle komplexen Zahlen λ, die von den endlich vielen Eigenwerten λ_j mit $|\lambda_j| \leqq 1$ verschieden sind, hat man $P_\lambda = 0$.*

c) *Es bestehen die Relationen*

$$P_\lambda P_\mu = 0 \text{ für } \lambda \neq \mu,\ TP_\lambda = P_\lambda T,\ TR = RT,\ RP_\lambda = P_\lambda R = 0,$$
$$T^n = R^n + \sum_{|\lambda| \leq 1} T^n P_\lambda = R^n + \sum_j T^n P_{\lambda_j}.$$

d) *R ist ein stetiger Endomorphismus, so daß $I - \lambda R$ für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ ein topologischer Automorphismus ist.*

Beweis. Als Endomorphismen P_λ verwenden wir die im vorigen Hilfssatz konstruierten Projektoren. Es gelten dann die Aussagen a) und b) sowie die in c) angegebenen Relationen. Außerdem weiß man, daß der Endomorphismus $I - \mu T + \mu T P_\mu$ für jede komplexe Zahl μ mit $|\mu| \leqq 1$ ein topologischer Automorphismus ist. Dasselbe gilt dann auf Grund der Beziehung

$$[I-\mu R]\,[I-\mu \sum_{|\lambda| \leq 1} TP_\lambda + \mu T P_\mu] = [I-\mu \sum_{|\lambda| \leq 1} TP_\lambda + \mu T P_\mu]\,[I-\mu R] = I - \mu T + \mu T P_\mu$$

für $I - \mu R$.

Im Anschluß an Theorem 2 ergibt sich eine Charakterisierung der R-Endomorphismen.

Satz 10. *Ein stetiger Endomorphismus T eines separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes ist dann und nur dann ein R-Endomorphismus, wenn T in der Form*

$$T = R + TP$$

dargestellt werden kann und dabei die folgenden Aussagen gelten:

a) *P ist ein stetiger Projektor mit endlichdimensionalem Bildraum.*

b) *R ist ein stetiger Endomorphismus, so daß $I - \lambda R$ für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ ein topologischer Automorphismus ist.*

c) *Die Endomorphismen T und P sind vertauschbar.*

Notwendigkeit. Wir setzen $P = \sum_{|\lambda| \leq 1} P_\lambda$. Wegen $P_\lambda P_\mu = 0$ für $\lambda \neq \mu$ gilt $P^2 = P$. Alle anderen Aussagen ergeben sich unmittelbar aus Theorem 2.

Hinlänglichkeit. Aus $T = R + TP$ und $TP = PT$ folgt $RP = PR = 0$. Für eine beliebige komplexe Zahl λ erhält man die Beziehungen

$$T_\lambda[I - P] = R_\lambda - P \tag{1}$$

und $R_\lambda P = PR_\lambda = P$. Durch Induktion ergibt sich $[R_\lambda - P]^n = R_\lambda^n - P$ für $n = 1, 2, \ldots$. Folglich gilt

(2) $$T_\lambda^n[I - P] = R_\lambda^n - P \text{ für } n = 1, 2, \ldots.$$

Wir beweisen nun für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ und $n = 1, 2, \ldots$ die Beziehungen

(3) $$\mathfrak{N}(T_\lambda^n) \subset \mathfrak{B}(P) \text{ und } \mathfrak{N}(P) \subset \mathfrak{B}(T_\lambda^n).$$

Dazu bemerken wir, daß nach Voraussetzung der stetige Endomorphismus R_λ^{-1}, der mit T_λ und P vertauschbar ist, existiert. Für $x \in \mathfrak{N}(T_\lambda^n)$ ergibt sich aus (2) $x = PR_\lambda^{-n}x$ und somit $x \in \mathfrak{B}(P)$, während man für $y \in \mathfrak{N}(P)$ wegen (2) die Beziehung $T_\lambda^n[I - P]\, R_\lambda^{-n} y = y$ erhält, aus der $y \in \mathfrak{B}(T_\lambda^n)$ folgt.

Der Endomorphismus R_λ ist eine σ-Transformation. Das gleiche gilt für $R_\lambda - P$. Wegen (1) ist demnach auch T_λ eine σ-Transformation.

Aus (3) ergeben sich unmittelbar die Aussagen b) und c) von Definition 3, weil die wachsende Folge $\{\mathfrak{N}(T_\lambda^n) : n = 1, 2, \ldots\}$ durch den endlichdimensionalen Unterraum $\mathfrak{B}(P)$ nach oben und die fallende Folge $\{\mathfrak{B}(T_\lambda^n) : n = 1, 2, \ldots\}$ durch den endlichcodimensionalen Unterraum $\mathfrak{N}(P)$ nach unten beschränkt ist. Aus $\mathfrak{N}(T_\lambda) \subset \mathfrak{B}(P)$ folgt außerdem, daß es nur endlich viele verschiedene Eigenwerte λ_j mit $|\lambda_j| \leqq 1$ geben kann, weil die zugehörigen Eigenlösungen linear unabhängig sind.

3. Quasi-präkompakte beschränkte Endomorphismen.

Den Betrachtungen dieses Abschnittes wollen wir vorerst einen komplexen Banachraum E zugrunde legen.

Definition 4. *Ein beschränkter (= stetiger) Endomorphismus A eines komplexen Banachraumes heißt quasi-kompakt, wenn es eine natürliche Zahl n und einen kompakten Endomorphismus K gibt, so daß*

$$\| A^n - K \| < 1$$

gilt[3]).

Satz 11. *Jeder quasi-kompakte beschränkte Endomorphismus ist quasi-präkompakt.*

Beweis. Wir setzen $W = \{x : \| x \| \leqq 1\}$ und zeigen, daß es zu jeder Nullumgebung U von E eine natürliche Zahl p und endlich viele Elemente $y_i \in E$ mit $A^p(W) \subset \bigcup \{y_i + U\}$ gibt. Dabei können wir annehmen, daß U die spezielle Form $U = \varepsilon W$ mit $\varepsilon > 0$ hat.

Zu $\varrho = \| A^n - K \| < 1$ existiert eine natürliche Zahl k mit $\varrho^k < \frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt dann mit $p = kn$ die Beziehung $\| A^p - L \| \leqq \| A^n - K \|^k < \frac{\varepsilon}{2}$, in der L ein kompakter Endomorphismus ist. Daraus folgt $A^p(W) \subset L(W) + \frac{\varepsilon}{2} W$. Schließlich gibt es eine endliche Überdeckung $\bigcup \left\{y_i + \frac{\varepsilon}{2} W\right\}$ von $L(W)$, und wir erhalten

$$A^p(W) \subset \bigcup \{y_i + \varepsilon W\}.$$

Satz 12. *Jeder R-Endomorphismus ist quasi-kompakt.*

Beweis. Nach Satz 10 kann jeder R-Endomorphismus in der Form

$$T = R + TP$$

dargestellt werden. Dabei gehören alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ zur Resolventen-

[3]) Vgl. [18].

menge von R. Folglich gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \| R^k \|^{\frac{1}{k}} < 1$. Zu einer Zahl ϱ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \| R^k \|^{\frac{1}{k}} < \varrho < 1$ existiert demnach eine natürliche Zahl n mit $\| R^n \|^{\frac{1}{n}} < \varrho < 1$, und man hat $\| R^n \| < 1$. Schließlich ergibt sich aus der Beziehung $T^n = R^n + T^n P$ mit $K = T^n P$ die Behauptung $\| T^n - K \| < 1$.

Durch Zusammenfassung erhalten wir

Theorem 3. *Für einen beschränkten Endomorphismus T eines komplexen Banachraumes sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *T ist ein R-Endomorphismus.*

b) *T ist quasi-präkompakt.*

c) *T ist quasi-kompakt.*

Im folgenden dehnen wir die in Theorem 3 bewiesenen Aussagen auf beliebige vollständige und separierte komplexe lokalkonvexe Vektorräume aus. Dabei müssen wir auf die Betrachtung der quasi-kompakten Endomorphismen verzichten, weil sich ihre Definition nicht übertragen läßt. Wie das folgende Gegenbeispiel zeigt, ist es außerdem notwendig, die Gesamtheit der stetigen Endomorphismen einzuschränken.

Beispiel eines nicht quasi-präkompakten stetigen R-Endomorphismus:

Ist ω der vollständige und separierte komplexe lokalkonvexe Vektorraum aller komplexen Folgen $\mathfrak{x} = \{x_k : k = 1, 2, \ldots\}$, dessen Topologie in bekannter Weise durch die Halbnormen $p_k(\mathfrak{x}) = | x_k |$ erzeugt wird, so betrachten wir den stetigen Endomorphismus

$$T(\mathfrak{x}) = \left\{\frac{1}{k} x_k\right\},$$

und behaupten, daß T ein R-Endomorphismus ist. Zum Beweis genügen die folgenden Bemerkungen:

a) Für jede komplexe Zahl $\lambda \neq 1, 2, \ldots$ ist $T_\lambda = I - \lambda T$ ein topologischer Automorphismus von ω.

b) Für jede komplexe Zahl $\lambda = 1, 2, \ldots$ gilt mit $n \geqq 1$
$\mathfrak{N}(T_\lambda^n) = \mathfrak{N}(T_\lambda) = \{\mathfrak{x} : x_k = 0 \text{ für } k \neq \lambda\}$ und $\mathfrak{B}(T_\lambda^n) = \mathfrak{B}(T_\lambda) = \{\mathfrak{x} : x_k = 0 \text{ für } k = \lambda\}$.

c) Nach dem in ω gültigen Satz über offene Abbildungen folgt aus der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{B}(T_\lambda)$, daß T_λ offen ist.

Andererseits ergibt sich aber, daß T nicht quasi-präkompakt sein kann. Ist nämlich W eine Nullumgebung in ω, so daß es zu jeder absolutkonvexen Nullumgebung U von ω eine natürliche Zahl p und endlich viele Elemente $\mathfrak{y}_i \in \omega$ mit $T^p(W) \subset \bigcup \{\mathfrak{y}_i + U\}$ gibt, so folgt daraus für eine positive Zahl α mit $\mathfrak{y}_i \in \alpha U$ die Beziehung $T^p(W) \subset (\alpha + 1)\, U$. Nun existiert zu W eine natürliche Zahl n mit $W_n = \{\mathfrak{x} : | x_k | \leqq \frac{1}{n} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n\} \subset W$. Setzt man $U = W_{n+1}$, so müßte $T^p(W) \subset (\alpha + 1)\, W_{n+1}$ gelten. Daraus würde aber für $\mathfrak{x} \in W_n \subset W$ die falsche Aussage $| x_{n+1} | \leqq (\alpha + 1)\,(n + 1)^{p-1}$ folgen.

Ein Endomorphismus T eines komplexen lokalkonvexen Vektorraumes E heißt bekanntlich *beschränkt*, wenn es in E eine Nullumgebung W gibt, die durch T in eine beschränkte Menge abgebildet wird. Viele Untersuchungen über beschränkte Endomorphismen eines (folgenvollständigen und separierten) komplexen lokalkonvexen Vektorraumes lassen sich durch das folgende Verfahren auf Betrachtungen über ebensolche Endomorphismen in komplexen Banachräumen zurückführen[4]).

---

[4]) Vgl. etwa [1] oder [12].

Ist W eine abgeschlossene und absolutkonvexe Nullumgebung in E, so gilt für die durch W erzeugte Halbnorm $p(x)$ die Beziehung $W = \{x : p(x) \leqq 1\}$. Mit E_W bezeichnet man den Quotientenraum von E nach $N = \{x : p(x) = 0\}$, auf dem durch den Ansatz $\| \dot{x} \| = p(x)$ eine Norm definiert wird [5]). Durch Vervollständigung erhält man schließlich den Banachraum $\hat{E}_W$.

Dem Endomorphismus T, der die Nullumgebung W in eine beschränkte Menge abbildet, ordnet man nun den beschränkten Endomorphismus $\mathfrak{T}$ zu, den man durch stetige Fortsetzung der Abbildung $\mathfrak{T}(\dot{x}) = (Tx)^0$ auf $\hat{E}_W$ gewinnt. Es gilt $\| \mathfrak{T} \| = \sup \{p(Tx) : x \in W\}$.

Satz 13. *Jeder beschränkte R-Endomorphismus eines separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes ist quasi-präkompakt.*

Beweis. Nach Satz 10 kann jeder R-Endomorphismus in der Form

$$T = R + TP$$

dargestellt werden. Weil der stetige Projektor P einen endlichdimensionalen Bildraum besitzt, ist er beschränkt. Dasselbe gilt dann auch für R. Es sei nun $W = \{x : p(x) \leqq 1\}$ eine abgeschlossene und absolutkonvexe Nullumgebung von E, die durch T, P, R jeweils in eine beschränkte Menge abgebildet wird. Nach Konstruktion von R gibt es zu jeder komplexen Zahl λ mit $|\lambda| \leqq 1$ einen stetigen Endomorphismus D_λ mit

$$[I - \lambda R]\,[I - D_\lambda] = [I - D_\lambda]\,[I - \lambda R] = I.$$

Wegen $D_\lambda = \lambda D_\lambda R - \lambda R$ ist auch $D_\lambda(W)$ beschränkt. Geht man zu den Endomorphismen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}_\lambda$ von $\hat{E}_W$ über, so gilt $\lambda\mathfrak{R} + \mathfrak{D}_\lambda - \lambda\mathfrak{R}\mathfrak{D}_\lambda = \mathfrak{D}_\lambda + \lambda\mathfrak{R} - \lambda\mathfrak{D}_\lambda\mathfrak{R} = \mathfrak{O}$. Wenn man mit $\mathfrak{J}$ die identische Abbildung von $\hat{E}_W$ bezeichnet, hat man schließlich

$$[\mathfrak{J} - \lambda\mathfrak{R}]\,[\mathfrak{J} - \mathfrak{D}_\lambda] = [\mathfrak{J} - \mathfrak{D}_\lambda]\,[\mathfrak{J} - \lambda\mathfrak{R}] = \mathfrak{J}.$$

Folglich gehören alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ zur Resolventenmenge von $\mathfrak{R}$, und es gibt eine positive Zahl ϱ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \| \mathfrak{R}^n \|^{\frac{1}{n}} < \varrho < 1$ und eine natürliche Zahl n_0, so daß aus $n \geqq n_0$ stets $\| \mathfrak{R}^n \|^{\frac{1}{n}} < \varrho < 1$ folgt. Wenn wir zu dem Endomorphismus R zurückkehren, erhalten wir $R^n(W) \subset \varrho^n W$ für $n \geqq n_0$.

Ist U eine beliebige Nullumgebung von E, so existiert eine positive Zahl α mit $2T(W) \subset \alpha U$. Nun bestimmen wir eine natürliche Zahl $p \geqq n_0$ mit $\alpha\varrho^p < 1$. Dann gilt die Beziehung $\alpha R^p(W) \subset W$, und mit $K = T^p P$ ergibt sich $\alpha T^p(W) \subset \alpha R^p(W) + \alpha K(W) \subset W + \alpha K(W)$. Da es zu $\alpha K(W)$ [6]) eine endliche Überdeckung $\bigcup \{z_i + W\}$ gibt, hat man $\alpha T^p(W) \subset \bigcup \{z_i + 2W\}$. Daraus erhält man $\alpha T^{p+1}(W) \subset \bigcup \{Tz_i + 2\,T(W)\} \subset \bigcup \{Tz_i + \alpha U\}$. Mit $y_i = \alpha^{-1} Tz_i$ hat man folglich $T^{p+1}(W) \subset \bigcup \{y_i + U\}$.

Abschließend formulieren wir

Theorem 4. *Für einen beschränkten Endomorphismus T eines vollständigen und separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *T ist ein R-Endomorphismus.*

b) *T ist quasi-präkompakt.*

---

[5]) Mit $\dot{x}$ wird die das Element x enthaltende Restklasse bezeichnet.

[6]) $K(W)$ ist präkompakt, weil $P(W)$ präkompakt (beschränkt und endlichdimensional) ist.

4. Ein Ergodensatz.

Zu Beginn dieses Abschnittes beweisen wir eine Verschärfung von Theorem 2. Dazu benötigen wir

Hilfssatz 7. *Ist T ein Endomorphismus eines komplexen lokalkonvexen Vektorraumes E und gilt für alle Elemente $x \in E$ die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}T^n x\right] = 0,$$

so hat man für $T_\lambda = I - \lambda T$ die folgenden Aussagen:

a) *Für jede komplexe Zahl λ mit $|\lambda| < 1$ gilt $\mathfrak{N}(T_\lambda) = \{0\}$.*

b) *Für jede komplexe Zahl λ mit $|\lambda| \leqq 1$ gilt $\mathfrak{N}(T_\lambda) = \mathfrak{N}(T_\lambda^2)$.*

Beweis. a) Für jede komplexe Zahl λ mit $|\lambda| < 1$ hat man $\lim\limits_{n\to\infty}[n\lambda^n] = 0$. Daraus folgt für ein Element $x \in E$ mit $x = \lambda T x$ wegen $x = \lambda^n T^n x$ die Aussage

$$x = \lim_{n\to\infty}[\lambda^n T^n x] = \lim_{n\to\infty}[n\lambda^n]\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}T^n x\right] = 0.$$

b) Für ein Element $x \in E$ ergibt sich aus $T_\lambda^2 x = 0$ durch Induktion

$$\lambda^n T^n x = x - n T_\lambda x.$$

Hat man $|\lambda| \leqq 1$, so folgt daraus

$$T_\lambda x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}x\right] - \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\lambda^n T^n x\right] = 0.$$

Theorem 5. *Ist T ein R-Endomorphismus eines separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes und gilt für alle Elemente $x \in E$ die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}T^n x\right] = 0,$$

so kann T in der Form

$$T = R + \sum_{|\lambda|=1}\lambda^{-1}P_\lambda = R + \sum_j \lambda_j^{-1}P_{\lambda_j}$$

dargestellt werden. Dabei gelten die folgenden Aussagen:

a) *Die Endomorphismen P_λ sind für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| = 1$ die stetigen Projektoren von E auf $\mathfrak{N}(T_\lambda)$ längs $\mathfrak{B}(T_\lambda)$.*

b) *Für alle komplexen Zahlen λ, die von den endlich vielen Eigenwerten λ_j mit $|\lambda_j| = 1$ verschieden sind, hat man $P_\lambda = 0$.*

c) *Es bestehen die Relationen*

$$P_\lambda P_\mu = 0 \text{ für } \lambda \neq \mu,\ \lambda T P_\lambda = \lambda P_\lambda T = P_\lambda,\ TR = RT,\ RP_\lambda = P_\lambda R = 0,$$

$$T^n = R^n + \sum_{|\lambda|=1}\lambda^{-n}P_\lambda = R^n + \sum_j \lambda_j^{-n}P_{\lambda_j} \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots.$$

d) *R ist ein stetiger Endomorphismus, so daß $I - \lambda R$ für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ ein topologischer Automorphismus ist.*

Beweis. Wegen Hilfssatz 7 hat man für jede komplexe Zahl λ mit $|\lambda| < 1$ die Aussage $P_\lambda = 0$. Folglich gilt

$$T = R + \sum_{|\lambda|=1} T P_\lambda = R + \sum_j T P_{\lambda_j}.$$

Wir ergänzen nun den Beweis von Theorem 2 folgendermaßen. Zu a): Nach Konstruktion ist P_λ mit $|\lambda| = 1$ der stetige Projektor von E auf $\mathfrak{N}(T_\lambda^s)$ längs $\mathfrak{B}(T_\lambda^s)$. Dabei ist s eine beliebige natürliche Zahl mit $s \geqq n(\lambda) + m(\lambda)$. Nun gilt aber wegen Hilfssatz 7 die Beziehung $\mathfrak{N}(T_\lambda^s) = \mathfrak{N}(T_\lambda)$. Ist $\mathfrak{B}(T_\lambda^s) \neq \mathfrak{B}(T_\lambda)$, so bestimmen wir ein $x \in \mathfrak{B}(T_\lambda)$ mit $x \bar{\in} \mathfrak{B}(T_\lambda^s)$ [7]. Dazu wählen wir zwei Elemente y und z aus E mit $x = T_\lambda y$ und $T_\lambda^s x = T_\lambda^{2s+1} z$. Wenn man $u = y - T_\lambda^s z$ setzt, so gilt

$$T_\lambda u = x - T_\lambda^{s+1} z \neq 0 \text{ und } T_\lambda^{s+1} u = 0.$$

Daraus ergibt sich die falsche Aussage $\mathfrak{N}(T_\lambda^{s+1}) \neq \mathfrak{N}(T_\lambda)$. Folglich hat man $\mathfrak{B}(T_\lambda^s) = \mathfrak{B}(T_\lambda)$.

Zu c): Wegen $\mathfrak{B}(P_\lambda) = \mathfrak{N}(T_\lambda)$ hat man $T_\lambda P_\lambda = 0$. Daraus folgt $P_\lambda = \lambda T P_\lambda$.

Im folgenden betrachten wir für einen R-Endomorphismus T eines separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes E die Folge der arithmetischen Mittel

$$\mathfrak{M}_n(T) = \frac{1}{n}\,[T + T^2 + \cdots + T^n] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Um über diese Folge Konvergenzaussagen machen zu können, führen wir auf der *Gesamtheit $\mathcal{L}(E)$ der stetigen Endomorphismen von E separierte lokalkonvexe Topologien* ein [8].

Ist $\mathcal{B}$ *das System aller absolutkonvexen und beschränkten Teilmengen von E*, so betrachtet man Teilsysteme $\mathcal{S} < \mathcal{B}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) *Aus $S \in \mathcal{S}$ folgt für jede absolutkonvexe Menge S' mit $S' < S$ stets $S' \in \mathcal{S}$.*

b) *Aus $S \in \mathcal{S}$ folgt für alle komplexen Zahlen λ stets $\lambda S \in \mathcal{S}$.*

c) *Zu zwei Mengen $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ existiert eine Menge $S \in \mathcal{S}$ mit $S_1 \cup S_2 < S$.*

d) *Zu jedem Element $x \in E$ existiert eine Menge $S \in \mathcal{S}$ mit $x \in S$.*

e) *Für jeden Endomorphismus $T \in \mathcal{L}(E)$ folgt aus $S \in \mathcal{S}$ stets $T(S) \in \mathcal{S}$.* [9]

Man erhält auf $\mathcal{L}(E)$ eine separierte lokalkonvexe Topologie (*$\mathcal{S}$-Topologie*), wenn man als Nullumgebungen die Mengen

$$\mathcal{V}(S, U) = \{T : T \in \mathcal{L}(E),\ T(S) < U\}$$

verwendet, wobei S das System $\mathcal{S}$ und U alle Nullumgebungen von E durchläuft. Ist $\mathcal{F}$ *das System aller endlichdimensionalen, absolutkonvexen und beschränkten Teilmengen von E*, so gilt für ein beliebiges System $\mathcal{S}$ die Beziehung $\mathcal{F} < \mathcal{S} < \mathcal{B}$. Daraus folgt, daß die durch $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{B}$ erzeugte *schwache* bzw. *starke Topologie* gröber bzw. feiner als jede $\mathcal{S}$-Topologie ist.

Theorem 6. *Ist T ein R-Endomorphismus eines separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes E, so sind in $\mathcal{L}(E)$ für jede $\mathcal{S}$-Topologie die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\,T^n\right] = 0,$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,[\lambda T + \lambda^2 T^2 + \cdots + \lambda^n T^n] = P_\lambda$ *für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| = 1$.* [10]

Beweis. Auf Grund der Identität ($n \geqq 2$)

$$\frac{1}{n}\,T^n = \mathfrak{M}_n(T) - \mathfrak{M}_{n-1}(T) + \frac{1}{n}\,\mathfrak{M}_{n-1}(T)$$

ergibt sich aus $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{M}_n(T) = P_1$ unmittelbar $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\,T^n\right] = 0$.

---

[7]) Wir können $s \geqq 2$ voraussetzen.

[8]) Vgl. [4].

[9]) Diese Bedingung wird im allgemeinen nicht gefordert. Sie ist jedoch für alle in Betracht kommenden Systeme erfüllt.

[10]) Wegen der Bedeutung von P_λ vgl. man Theorem 5.

Zum Beweis der Umkehrung nehmen wir an, daß $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}T^n\right]=0$ gilt. Da es zu jedem Element $x\in E$ ein $S\in\mathcal{S}$ mit $x\in S$ gibt, folgt daraus $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}T^n x\right]=0$. Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 5 erfüllt. Für den stetigen Projektor P_λ gilt dann wegen c) die Identität $\lambda T P_\lambda = P_\lambda$, und es ergibt sich $\mathfrak{M}_n(\lambda T)-P_\lambda=\mathfrak{M}_n(\lambda T)\,[I-P_\lambda]$. Weil die Einschränkung von T_λ auf $\mathfrak{B}(T_\lambda)$ eine stetige Inverse besitzt[11]), hat man für eine beliebige Menge $S\in\mathcal{S}$ die Beziehung $S'=T_\lambda^{-1}[I-P_\lambda](S)\in\mathcal{S}$. Folglich ergibt sich

$$[\mathfrak{M}_n(\lambda T)-P_\lambda]\,(S)=\mathfrak{M}_n(\lambda T)[I-P_\lambda](S)=\mathfrak{M}_n(\lambda T)\;T_\lambda(S')=\frac{1}{n}\,[\lambda T-\lambda^{n+1}T^{n+1}](S').$$

Ist U eine beliebige absolutkonvexe Nullumgebung von E, so existiert eine reelle Zahl $\alpha\geqq 1$ mit $T(S')\subset\alpha U$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}T^n\right]=0$ gibt es eine natürliche Zahl $n_0\geqq 2\alpha$, so daß aus $n\geqq n_0$ stets $\frac{1}{n}T^n(S')\subset\frac{1}{4}U$ folgt. Für $n\geqq n_0$ hat man demnach

$$\frac{1}{n}\,[\lambda T-\lambda^{n+1}T^{n+1}]\,(S')\subset\frac{1}{n}\,T(S')+\frac{1}{n}\,T^{n+1}(S')\subset\frac{\alpha}{n}\,U+\frac{n+1}{4n}\,U\subset U.$$

Folglich gilt für $n\geqq n_0$ immer $\mathfrak{M}_n(\lambda T)-P_\lambda\in\mathcal{D}(S,U)$, und die behauptete Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_n(\lambda T)=P_\lambda$$

ist bewiesen.

Die folgende Verschärfung von Theorem 6 können wir nur für quasi-präkompakte stetige Endomorphismen beweisen.

Theorem 7. *Ist A ein quasi-präkompakter stetiger Endomorphismus eines tonnelierten, vollständigen und separierten komplexen lokalkonvexen Vektorraumes E, so sind in $\mathcal{L}(E)$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}A^n x\right]=0 \text{ für alle } x\in E.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\lambda A+\lambda^2A^2+\cdots+\lambda^nA^n]=P_\lambda$ *für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda|=1$ und für jede $\mathcal{S}$-Topologie.*

Beweis. Wir nehmen an, daß für alle Elemente $x\in E$ die Beziehung $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}A^n x\right]=0$ gilt und zeigen, daß dann die Folge $\{\mathfrak{M}_n(\lambda A)\}$ für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda|=1$ in der starken Topologie gegen P_λ konvergiert. Damit ist auch die Konvergenz der betrachteten Folge für jede $\mathcal{S}$-Topologie bewiesen.

Ist W eine abgeschlossene und absolutkonvexe Nullumgebung von E mit den in der Definition von A geforderten Eigenschaften, so ist

$$V=\left\{x:\frac{1}{n}A^n x\in W \text{ für } n=1,2,\ldots\right\}$$

eine absorbierende, abgeschlossene und absolutkonvexe Menge (tonneau). Weil E tonneliert ist, muß V eine Nullumgebung sein[12]).

Nun sei U eine beliebige abgeschlossene und absolutkonvexe Nullumgebung von E mit $U\subset V\cap W$. Dann gibt es eine natürliche Zahl p und endlich viele Elemente $y_i\in E$ mit $A^p(W)\subset\bigcup\{y_i+\frac{1}{2}U\}$. Wir setzen $T=A^p$. Nun existiert eine positive Zahl α mit

[11]) Vgl. Beweis von Hilfssatz 6.

[12]) Wenn man annimmt, daß die Familie $\left\{\frac{1}{n}A^n: n=1,2,\ldots\right\}$ gleichgradig stetig ist, kann man auf die Voraussetzung, daß E tonneliert sein soll, verzichten.

$y_i \in \alpha U$, und es gilt die Beziehung $T(W) \in (\alpha + \frac{1}{2})\, U$. Aus $\frac{1}{n} T^n(V) = p \frac{1}{pn} A^{pn}(V) < pW$ folgt $\frac{1}{n} T^{n+1}(V) < pT(W)$ und schließlich $\frac{1}{n+1} T^{n+1}(V) < p(\alpha + \frac{1}{2})\, U$. Zusammen mit $T(W) < (\alpha + \frac{1}{2})\, U$ erhält man demnach mit $\mu = p(\alpha + \frac{1}{2})$ die Beziehung

$$(1) \qquad \frac{1}{n} T^n(U) < \mu U \text{ für } n = 1, 2, \ldots.$$

Andererseits ergibt sich aus $T(U) < T(W) < \bigcup \{y_i + \frac{1}{2} U\}$ durch Induktion

$$(2) \qquad T^{n+1}(U) < \bigcup \left\{ T^n y_{j_0} + \frac{1}{2} T^{n-1} y_{i_1} + \cdots + \frac{1}{2^n} y_{i_n} + \frac{1}{2^{n+1}} U \right\} \text{[13]}.$$

Damit ist gezeigt, daß sich $T^{n+1}(U)$ durch endlich viele Mengen der Form $z + \frac{1}{2^{n+1}} U$ überdecken läßt.

Geht man zu dem Banachraum $\hat{E}_U$ über, so erhält man durch stetige Fortsetzung der Abbildung $\mathfrak{T}\dot{x} = (Tx)^{\cdot}$ den beschränkten Endomorphismus $\mathfrak{T}$. Wegen (1) hat man $\left\| \frac{1}{n} \mathfrak{T}^n \right\| \leqq \mu$. Aus $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} T^n x \right] = 0$ ergibt sich $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} \mathfrak{T}^n \dot{x} \right] = \dot{0}$ für $\dot{x} \in E_U$. Daraus folgt wegen $\left\| \frac{1}{n} \mathfrak{T}^n \right\| \leqq \mu$

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} \mathfrak{T}^n \mathfrak{x} \right] = 0 \text{ für alle } \mathfrak{x} \in \hat{E}_U.$$

Da man aus (2) entnehmen kann, daß der Endomorphismus $\mathfrak{T}$ quasipräkompakt ist, sind die Voraussetzungen von Theorem 5 erfüllt. Es existiert demnach eine Darstellung $\mathfrak{T} = \mathfrak{R} + \sum\limits_j \lambda_j^{-1} \mathfrak{P}_{\lambda_j}$, so daß alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| \leqq 1$ zur Resolventenmenge von $\mathfrak{R}$ gehören. Wir wählen nun eine Zahl ϱ mit $\lim\limits_{n \to \infty} \| \mathfrak{R}^n \|^{\frac{1}{n}} < \varrho < 1$, und bestimmen eine natürliche Zahl n_0, so daß für $n \geqq n_0$ stets die Beziehung $\| \mathfrak{R}^n \| < \varrho^n < 1$ gilt. Wegen $\mathfrak{T}^n = \mathfrak{R}^n + \sum\limits_j \lambda_j^{-n} \mathfrak{P}_{\lambda_j}$ hat man dann

$$(4) \qquad \| \mathfrak{T}^n \| \leqq \| \mathfrak{R}^n \| + \sum_j |\lambda_j|^{-n} \| \mathfrak{P}_{\lambda_j} \| \leqq 1 + \sum_j \| \mathfrak{P}_{\lambda_j} \| = \tau.$$

Wenn man zu der ursprünglichen Abbildung T zurückkehrt, erhält man $T^n(U) < \tau U$ für $n \geqq n_0$.

Zu jeder beliebigen Menge $B \in \mathcal{B}$ gibt es eine positive Zahl α, so daß $A^k(B) < \alpha U$ für $k < n_0 p$ gilt. Wenn man die natürliche Zahl n in der Form $n = hn_0 p + k$ mit $k < n_0 p$ darstellt, ergibt sich $A^n(B) = T^{hn_0} A^k(B) < \alpha\tau U$. Folglich gilt $\frac{1}{n} A^n \in \mathcal{V}(B, U)$ für $n \geqq \alpha\tau$. Damit ist für die starke Topologie die Beziehung $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} A^n \right] = 0$ bewiesen, und nach Theorem 6 ergibt sich $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{M}_n(\lambda A) = P_\lambda$ für alle komplexen Zahlen λ mit $|\lambda| = 1$.

Umgekehrt folgt für jede $\mathcal{S}$-Topologie aus $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{M}_n(A) = P_1$ nach Theorem 6 $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} A^n \right] = 0$. Insbesondere gilt dann $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n} A^n x \right] = 0$ für alle $x \in E$.

---

[13]) Die Indizes $i_0, \ldots, i_n$ durchlaufen getrennt alle i.

Literatur.

[1] *M. Altman*, On linear functional equations in locally convex linear topological spaces, Stud. Math. **13** (1953), 194—207.

[2] *M. Altman*, Mean ergodic theorem in locally convex linear topological spaces, Stud. Math. **13** (1953), 190—193.

[3] *N. Bourbaki*, Topologie générale, Chap. I, II, Paris 1951.

[4] *N. Bourbaki*, Espaces vectoriels topologiques, Chap. I—IV, Paris 1953/55.

[5] *A. Deprit*, Contibution à l'étude de l'Algèbre des Applications linéaires continues d'un Espace localement convexe séparé, Acad. roy. Bel., Cl. Sci., Mem., Coll. 8°, **31** (2) (1959).

[6] *N. Dunford* and *J. Schwartz*, Linear Operators I, New York 1958.

[7] *S. Kakutani*, Iteration of linear operations in complex Banach spaces, Proc. Imp. Acad. Japan **14** (1938), 295—300.

[8] *S. Kakutani*, Ergodic theory, Proc. Int. Congr. Math. **2** (1950), 128—142.

[9] *J. Leray*, Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes, Acta Scient. Math. **12** (1950), 177—186.

[10] *A. Pietsch*, Zur Theorie der σ-Transformationen in lokalkonvexen Vektorräumen, erscheint demnächst in Math. Nachr.

[11] *F. Riesz*, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math. **41** (1918), 71—98.

[12] *J. Ringrose*, Precompact linear operations in locally convex spaces, Proc. Camb. Phil. Soc. **53** (1957), 581—591.

[13] *F. Ruston*, Operators with a Fredholm theory, J. London Math. Soc. **29** (1954), 318—326.

[14] *H. Schaefer*, Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen, Math. Z. **66** (1956), 137—163.

[15] *J. H. Williamson*, Compact linear operators in linear topological spaces, J. London Math. Soc. **29** (1954), 149—155.

[16] *K. Yosida*, Abstract integral equation and the homogeneous stochastic process, Proc. Imp. Acad. Japan, **14** (1938), 286—291.

[17] *K. Yosida*, Mean ergodic theorem in Banach spaces, Proc. Imp. Acad. Japan, **14** (1938), 292—294.

[18] *K. Yosida*, Quasi-completely-continuous linear functional equations, Japan J. Math. **15** (1939), 297—301.

Eingegangen 11. Februar 1960.

Zerlegungen des Mittelwertes fastperiodischer Funktionen. I.

Von *Gilbert Helmberg* in Mainz.

§ 1. Einleitung.

Es sei X eine Gruppe. In der Menge $\mathfrak{Q}$ aller beschränkten komplexwertigen Funktionen auf X ist durch die Norm $\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x) |$ $(f \in \mathfrak{Q})$ eine Metrik definiert. Für $f \in \mathfrak{Q}$ und $a \in X$ seien die Links- und Rechtstranslationen ${}_a f \in \mathfrak{Q}$ bzw. $f_a \in \mathfrak{Q}$ von f mittels a definiert durch ${}_a f(x) = f(ax)$ und $f_a(x) = f(xa)$ für alle $x \in X$. Nach der von J. v. Neumann gegebenen Definition heißt eine Funktion $f \in \mathfrak{Q}$ fastperiodisch (fp.) auf X, wenn die Menge $\{{}_a f\colon a \in X\}$ (und damit auch die Menge $\{f_a\colon a \in X\}$) bedingt kompakt in der in $\mathfrak{Q}$ definierten Metrik ist. Ist X eine kompakte topologische Gruppe, so ist jede stetige Funktion auf X fastperiodisch.

Die Menge $\mathfrak{F}$ aller fp. Funktionen ist eine komplexe Banachalgebra in der oben angeführten Norm, wenn man die Operationen punktweise definiert. Sie enthält mit jeder Funktion f auch die zu ihr konjugierte Funktion $\bar{f}$ und die Funktion $| f |$. Auf $\mathfrak{F}$ ist unter allen beschränkten linearen Funktionalen ein Mittelwert M ausgezeichnet und durch folgende vier Eigenschaften eindeutig bestimmt:

(1)
1. $M(\alpha f + \beta g) = \alpha M(f) + \beta M(g)$, wenn $f, g \in \mathfrak{F}$, α, β komplex (Linearität)
2. $M(f) \geqq 0$, wenn $f \in \mathfrak{F}$, $f(x)$ reell, $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in X$ (Monotonie)
3. $M({}_a f) = M(f_a) = M(f)$, wenn $f \in \mathfrak{F}$, $a \in X$ (Invarianz)
4. $M(1) = 1$, wenn $1(x) = 1$ für alle $x \in X$ (Normiertheit).

Darüber hinaus gilt

(2) $M(f) > 0$, wenn $f \in \mathfrak{F}$, $f(x)$ reell, $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in X$, $f(x_0) > 0$ für mindestens ein $x_0 \in X$

(3) $| M(f) | \leqq M(| f |)$, wenn $f \in \mathfrak{F}$.

Im Falle der stetigen Funktionen auf einer kompakten Gruppe deckt sich dieser Mittelwert mit dem Haarschen Integral. Ist $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener rechtsinvarianter Modul in $\mathfrak{F}$ (Rechtsinvarianz bedeutet hier, daß $\mathfrak{M}$ mit f auch f_a für alle $a \in X$ enthält), der die Konstanten und mit jeder Funktion f auch die Funktion $\bar{f}$ enthält, so stimmt ein auf $\mathfrak{M}$ gegebenes Funktional bereits dann auf $\mathfrak{M}$ mit M überein, wenn es (1), 1 bis 4 erfüllt, wobei in (1), 3 nur Rechtsinvarianz erfüllt zu sein braucht (s. [6], § 11).

Ist X das direkte Produkt der Untergruppen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, und schreiben wir $f \in \mathfrak{F}$ als Funktion der n Variablen $x_i \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, so wird $f(x_1, \ldots, x_n)$ bei fest-

gehaltenen x_j $(j = 1, \ldots, n,\ j \neq i)$ zu einer fp. Funktion auf X_i. Bezeichnen wir mit M_i den zu X_i gehörigen Mittelwert, so ist die Funktion $M_i(f)$ fastperiodisch auf dem direkten Produkt $X_1 \otimes \cdots \otimes X_{i-1} \otimes X_{i+1} \otimes \cdots \otimes X_n$, und es gilt

$$M(f) = M_n\{M_{n-1}[\cdots M_1(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n))\cdots]\}.$$

Ein Spezialfall dieser Zerlegung ist die Darstellung des Riemannschen Integrals einer stetigen zweifach periodischen Funktion zweier reeller Veränderlicher über ein Periodenrechteck als ein iteriertes Integral über die beiden Periodenintervalle. Der Mittelwert M ist in diesem Falle also mit Hilfe der einfacheren Mittelwerte $M_i (i = 1, \ldots, n)$ erklärt.

Wir werden im folgenden untersuchen, in welchem Ausmaß eine ähnliche Zerlegung des Mittelwertes M auch im Falle einer Gruppe X möglich ist, die nicht direktes Produkt der Untergruppen X_i $(i = 1, \ldots, n)$ ist. Wir setzen zu diesem Zwecke für $f \in \mathfrak{F}$

$$M_{1,\ldots,n}(f) = M_n\{M_{n-1}[\cdots M_1(f(x_1 \cdots x_{n-1} x_n))\cdots]\} \tag{4}$$

mit $x_i \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Im Argument von f steht auf der rechten Seite von (4) das Produkt der Elemente $x_1, \ldots, x_n$ in dieser Ordnung. Diese ist im Gegensatz zur Reihenfolge der Mittelwertbildung wesentlich, da wir X nicht als Abelsch voraussetzen. Die obige Definition ist sinnvoll, da $f(x_1 \cdots x_n)$ auf dem direkten Produkt von n Exemplaren der Gruppe X fp. ist, also auch auf der Untergruppe $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ dieses direkten Produktes fp. ist. Da für jeden der Mittelwerte M_i $(i = 1, \ldots, n)$ die Eigenschaften (1), 1, 2 und 4 zutreffen, ist $M_{1,\ldots,n}$ ein lineares, monotones und normiertes Funktional auf $\mathfrak{F}$, das wegen (3) beschränkt ist. Die Übereinstimmung von $M_{1,\ldots,n}$ mit M auf $\mathfrak{F}$ oder einem rechtsinvarianten Modul $\mathfrak{M}$ der in Absatz 2 beschriebenen Art folgt also sofort, wenn wir unter gewissen, von den Untergruppen $X_1, \ldots, X_n$ zu erfüllenden Bedingungen zeigen können, daß $M_{1,\ldots,n}$ auch die (Rechts-)Invarianzeigenschaft (1), 3 besitzt.

Eine zweite Methode, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Übereinstimmung von $M_{1,\ldots,n}$ und M zu finden, stützt sich auf folgenden Hilfssatz (s z. B. [5] 7F):

Hilfssatz 1. *Es sei $\mathfrak{L}$ ein linearer normierter Raum, $\mathfrak{L}'$ ein in $\mathfrak{L}$ dichter linearer Unterraum und Φ' ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathfrak{L}'$. Dann läßt sich Φ' auf eine und nur eine Weise zu einem beschränkten Funktional Φ auf $\mathfrak{L}$ fortsetzen, und für die Normen von Φ und Φ' gilt*

$$\begin{aligned} \|\Phi'\| &= \sup\{|\Phi'(l')| : l' \in \mathfrak{L}',\ \|l'\| \leqq 1\} \\ &= \|\Phi\| = \sup\{|\Phi(l)| : l \in \mathfrak{L},\ \|l\| \leqq 1\}. \end{aligned}$$

Ist $\mathfrak{M}$ ein rechtsinvarianter abgeschlossener Modul in $\mathfrak{F}$, insbesondere $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, so liegen nach dem Hauptsatz über fp. Funktionen endliche Linearkombinationen der Basisfunktionen aller in $\mathfrak{M}$ enthaltenen endlichen irreduziblen rechtsinvarianten Moduln dicht in $\mathfrak{M}$. Auf den linearen Raum $\mathfrak{L}'$ dieser Linearkombinationen ist also Hilfssatz 1 anwendbar. Um die Übereinstimmung von $M_{1,\ldots,n}$ mit M auf $\mathfrak{M}$ festzustellen, brauchen wir nur zu untersuchen, ob beide Funktionale für die genannten Basisfunktionen übereinstimmen. Ist das der Fall, so müssen sie auch auf $\mathfrak{L}'$ und damit auf $\mathfrak{M}$ übereinstimmen. Dieser Zusammenhang unserer Fragestellung mit der Darstellungstheorie wurde in ähnlichen Fragestellungen, besonders in der Theorie der Gleichverteilung, bereits vielfach ausgenützt.

Die Frage nach der Übereinstimmung von $M_{1,\ldots,n}$ und M auf Untermoduln von $\mathfrak{F}$ erscheint aus zwei Gründen als sinnvoll. Erstens beschränkt man sich im Falle einer kompakten topologischen Gruppe meistens auf die Betrachtung der stetigen Funktionen, die im allgemeinen einen Untermodul von $\mathfrak{F}$ bilden. Zweitens erlaubt es bereits die Tat-

sache der Übereinstimmung von $M_{1,\ldots,n}$ und M auf bestimmten, sogenannten vollen Moduln in $\mathfrak{F}$, Rückschlüsse auf die Struktur der Gruppe zu ziehen, wenn man die durch die fp. Funktionen des Moduls in X erzeugte Topologie zu Hilfe nimmt. Aus diesem Grunde wird den weiteren Untersuchungen in § 2 neben einer Aufzählung später benötigter Tatsachen aus der Darstellungstheorie eine Charakterisierung von vollen Moduln als Algebren stetiger Funktionen vorangestellt.

In § 3 werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Zerlegungen des Mittelwertes und verwandter Funktionale nach dem Muster von (4) aufgestellt. Diese Ergebnisse werden in § 4 auf den Fall eines unendlichen Systems $\{X_\varrho\colon \varrho \in R\}$ von Untergruppen der Gruppe X übertragen. Das Auswahlaxiom wird immer vorausgesetzt.

In einem zweiten Teil dieser Arbeit sollen diese Ergebnisse auf kompakte Gruppen angewandt und mit Ergebnissen der Theorie der Gleichverteilung in Zusammenhang gebracht werden.

§ 2. Moduln von fp. Funktionen und irreduziblen Darstellungen.

Es sei $\{D^{(\lambda)}\colon \lambda \in L^*\}$ ein vollständiges System nicht äquivalenter irreduzibler unitärer Darstellungen von X. Der Grad von $D^{(\lambda)}$ sei s_λ. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß das System $\{D^{(\lambda)}\colon \lambda \in L^*\}$ mit jeder Darstellung $D^{(\lambda)}$ auch die dazu konjugierte enthält und bezeichnen diese mit $D^{(\bar\lambda)}$. Wenn der Charakter $\chi^{(\lambda)}$ von $D^{(\lambda)}$ reell ist, gilt $\lambda = \bar\lambda$. Die triviale Darstellung sei $D^{(1)}$. Is $d_{ik}^{(\lambda)}$ der an der Stelle (i, k) in $D^{(\lambda)}$ stehende Koeffizient, so ist $d_{ik}^{(\lambda)}$ als Funktion auf X fp., und es gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$(5)\qquad M(d_{ik}^{(\lambda)} d_{jl}^{(\bar\lambda')}) = \frac{1}{s_\lambda}\,\delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl}, \qquad \begin{array}{l}\delta_{ij} = 1 \text{ für } i = j\\ \delta_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j.\end{array}$$

Unter einem Modul von fp. Funktionen werden wir im folgenden immer einen nicht leeren, zweiseitig invarianten, abgeschlossenen komplexen Modul verstehen, der nicht null ist. Für festes $\lambda \in L^*$ bilden die komplexen Linearkombinationen der Koeffizienten der Darstellung $D^{(\lambda)}$ einen endlich-dimensionalen, (in bezug auf zweiseitige Invarianz) irreduziblen Modul, den wir $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ nennen wollen. Aus dem auf zweiseitig invariante Moduln angewendeten Hauptsatz für fp. Funktionen folgt, daß jeder Modul $\mathfrak{M} < \mathfrak{F}$ die abgeschlossene Hülle der direkten Summe aller in ihm enthaltenen Moduln $\mathfrak{D}^{(\lambda)}$ ist (s. [6], S. 132). Wir schreiben dafür

$$(6)\qquad \mathfrak{M} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}.$$

Ein Modul von Darstellungen $D^{(\lambda)}$ ist eine nicht leere Untermenge des Systems $\{D^{(\lambda)}\colon \lambda \in L^*\}$, die mit $D^{(\lambda)}$ auch $D^{(\bar\lambda)}$ und zu je zwei Darstellungen $D^{(\lambda)}, D^{(\lambda')}$ auch äquivalente zu jenen irreduziblen Darstellungen enthält, die durch Ausreduzieren des Kroneckerproduktes $D^{(\lambda)} \otimes D^{(\lambda')}$ entstehen. Insbesondere enthält jeder Modul von Darstellungen die triviale Darstellung $D^{(1)}$, da diese in $D^{(\lambda)} \otimes D^{(\bar\lambda)}$ enthalten ist. Ein Modul in $\mathfrak{F}$ heißt voll, wenn er mit jeder Funktion f auch die konjugiert komplexe Funktion $\bar f$ und mit je zwei Funktionen f, g auch ihr Produkt enthält. Der Modul $\mathfrak{M} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ ist dann und nur dann voll, wenn die Menge $\{D^{(\lambda)}\colon \lambda \in L\}$ ein Modul von Darstellungen ist (s. [3], II). Offenbar kann ein voller Modul auch als nicht leere zweiseitig invariante abgeschlossene selbstkonjugierte komplexe Algebra von fp. Funktionen charakterisiert werden, die nicht alle Null sind.

Ist $\mathfrak{G}$ eine nicht leere Menge vom komplexwertigen Funktionen auf X, so soll $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$ die kleinste Topologie für X bedeuten, in der alle Funktionen $f \in \mathfrak{G}$ stetig sind. Eine

in dieser Topologie stetige Funktion auf X soll kurz $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$-stetig heißen. Der kleinste eine nicht leere zweiseitig invariante Menge $\mathfrak{G} < \mathfrak{F}$ enthaltende volle Modul in $\mathfrak{F}$ soll der von $\mathfrak{G}$ erzeugte volle Modul $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ heißen. Wir benötigen später einige von G. Nöbeling und H. Bauer stammende Ergebnisse, die wir mit einigen leicht abzuleitenden Folgerungen in einem Satz zusammenfassen. Die Operation $\circ$ bedeutet hier und später wie üblich die Zusammensetzung zweier Funktionen.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine nicht leere zweiseitig invariante Untermenge von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ der von $\mathfrak{G}$ erzeugte volle Modul in $\mathfrak{F}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) *Es existiert eine kompakte Hausdorffsche Gruppe X' und ein Homomorphismus ϑ von X auf eine dichte Untergruppe von X' derart, daß eine komplexwertige Funktion f auf X dann und nur dann in $\mathfrak{A}$ liegt, wenn eine stetige, komplexwertige Funktion f' auf X' existiert mit $f = f' \circ \vartheta$.*

b) *Die Mengen der durch Funktionen von $\mathfrak{G}$ nicht getrennten Punkte von X sind die Restklassen eines $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$-abgeschlossenen Normalteilers $N(\mathfrak{G})$ von X. Es gilt $N(\mathfrak{G}) = N(\mathfrak{A})$.*

c) *$\mathfrak{A}$ ist die Algebra aller beschränkten komplexwertigen $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$-stetigen Funktionen auf X. Es gilt $\mathfrak{T}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{A})$.*

d) *Die Gruppenoperationen in X sind stetig in der Topologie $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$.*

e) *$\mathfrak{A}$ enthält mit der Funktion f auch die durch $f_1(x) = f(x^{n_1} a_1 x^{n_2} \cdots a_{s-1} x^{n_s})$ definierte Funktion f_1, wobei alle a_i beliebige feste Elemente aus X und alle n_i beliebige ganze Zahlen sind.*

Beweis: Die Behauptung a) ist der Inhalt von Satz 7 in [7]. Die Behauptung b) folgt aus Absatz 3 des zugehörigen Beweises. Ist e die Einheit in X und setzen wir $X(f) = \{x \in X\colon f(x) = f(e)\}$ für $f \in \mathfrak{G}$, so ist $X(f)$ trivialerweise $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$-abgeschlossen und ebenso der Normalteiler $N(\mathfrak{G}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{G}} X(f)$. Es sei $\bar{\mathfrak{G}} = \{\bar{f}\colon f \in \mathfrak{G}\}$. Da $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ die durch $\mathfrak{G} \cup \bar{\mathfrak{G}}$ erzeugte abgeschlossene Algebra ist, werden Punkte, die durch Funktionen aus $\mathfrak{G}$ nicht getrennt werden, auch durch Funktionen aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ nicht getrennt, und es gilt $N(\mathfrak{G}) = N(\mathfrak{A})$.

Offenbar ist $\mathfrak{T}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{G} \cup \bar{\mathfrak{G}})$. Nach dem eben Gesagten ist jede Funktion von $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$-stetig und somit $\mathfrak{T}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{T}(\mathfrak{A})$. Daß $\mathfrak{A}$ die Menge aller beschränkten komplexwertigen $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$-stetigen Funktionen auf X ist, folgt unmittelbar aus Satz III in [7].

Es sei $\mathfrak{A}'$ die Menge aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X', ferner $X'' = \vartheta(X)$ das homomorphe Bild von X in X' und $\mathfrak{A}''$ die Algebra aller komplexwertigen Funktionen auf X'', die durch Beschränkung von $\mathfrak{A}'$ auf X'' entsteht. Da X' vollständig regulär ist, ist die Topologie von X' identisch mit $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}')$. Die relative Topologie in K'' ist dann identisch mit $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}'')$. Wie oben ist $\mathfrak{A}''$ die Algebra aller beschränkten komplexwertigen $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}'')$-stetigen Funktionen auf X''. Der Raum X'' geht aus X durch Identifikation aller Punkte in jeder Restklasse des Normalteilers $N(\mathfrak{A})$ hervor. $\mathfrak{A}''$ geht nach a) durch die entsprechende Operation aus $\mathfrak{A}$ hervor. Die Gruppenoperationen in X'' sind stetig in $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}'')$. Da die vollständigen Urbilder der Punkte $x'' \in X''$ Restklassen des Normalteilers $N(\mathfrak{A})$ sind und eine Untermenge $U < X$ genau dann $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-offen ist, wenn sie das vollständige Urbild einer $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}'')$-offenen Untermenge $U'' < X''$ ist, sind die Gruppenoperationen in X stetig in $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$. Die Behauptung e) schließlich folgt aus c), da f_1 nach d) eine $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$-stetige Funktion auf X ist und nach c) der Algebra $\mathfrak{A}$ angehören muß.

Als Illustration zu Satz 1 sei die Algebra $\mathfrak{A}$ aller stetigen periodischen Funktionen auf der reellen Zahlengeraden R_0 mit der Periode p angeführt. $\mathfrak{A}$ ist ein voller Modul in der Menge aller fp. Funktionen auf R_0. Der zugehörige Normalteiler $N(\mathfrak{A}) = \{gp\colon g \text{ ganz}\}$

ist isomorph zur Gruppe der ganzen Zahlen. Die Faktorgruppe $R_0/N(\mathfrak{A})$ ist bereits kompakt und isomorph zur Gruppe der reellen Zahlen (mod p). Die zugehörige Topologie $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ für R_0 ist die Familie aller offenen Untermengen von R_0 mit der Periode p. Die den in $\mathfrak{A}$ enthaltenen endlichen irreduziblen Moduln entsprechenden Darstellungen haben die Form $D^{(n)}(x) = \exp\left(\frac{2\pi i n x}{p}\right)$ (n ganz).

Wir betrachten schließlich das direkte Produkt zweier Gruppen X und Y. Wie im Falle endlicher Gruppen überzeugt man sich unter Ausnützung von Schurs Lemma und der Orthogonalitätsrelationen für die Charaktere irreduzibler beschränkter Darstellungen davon, daß die irreduziblen beschränkten Darstellungen von $X \otimes Y$ genau die Kroneckerprodukte der irreduziblen beschränkten Darstellungen von X und Y sind. Wir schreiben dafür $D^{(\lambda, \lambda')}(x, y) = D^{(\lambda)}(x) \otimes D^{(\lambda')}(y)$. In Anlehnung an die Schreibweise in (6) erhalten wir für einen Modul $\mathfrak{M}(x, y)$ von fp. Funktionen auf $X \otimes Y$ die Darstellung

$$\mathfrak{M}(x, y) = \sum_{(\lambda, \lambda') \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}(x) \otimes \mathfrak{D}'^{(\lambda')}(y). \tag{7}$$

Ein Modul irreduzibler Darstellungen von $X \otimes Y$ enthält mit $D^{(\lambda)}(x) \otimes D'^{(\lambda')}(y)$ auch die Darstellung $D^{(\bar{\lambda})}(x) \otimes D'^{(\bar{\lambda}')}(y)$ und mit $D^{(\lambda)}(x) \otimes D'^{(\lambda')}(y)$ und $D^{(\mu)}(x) \otimes D'^{(\mu')}(y)$ auch eine äquivalente zu jeder irreduziblen Darstellung, die sich durch Ausreduzieren von $[D^{(\lambda)}(x) \otimes D'^{(\lambda')}(y)] \otimes [D^{(\mu)}(x) \otimes D'^{(\mu')}(y)] = [D^{(\lambda)}(x) \otimes D^{(\mu)}(x)] \otimes [D'^{(\lambda')}(y) \otimes D'^{(\mu')}(y)]$ ergibt.

§ 3. Endliche Zerlegungen des Mittelwertes.

Es sei $\{X_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ ein System von Untergruppen von X und das Funktional $M_{1,\ldots,n}$ auf $\mathfrak{F}$ erklärt wie in (4). Ist $\mathfrak{G}$ eine nicht leere Untermenge von $\mathfrak{F}$, so werden wir künftig

$$M = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{G})$$

für

$$M(f) = M_{1,\ldots,n}(f) \text{ für alle } f \in \mathfrak{G}$$

schreiben. Wenn wir Produkte wie $x_1 \cdots x_n$ unter Verwendung des Zeichens Π schreiben, haben wir darauf zu achten, daß die Reihenfolge der Faktoren im allgemeinen nicht geändert werden darf. Mengentheoretische Subtraktion wird durch $\setminus$ und die Nullmatrix durch 0 gekennzeichnet.

Satz 2. *Es sei* $\mathfrak{M} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\ )}$ *ein Modul in* $\mathfrak{F}$ *und* $\{X_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ *ein System von Untergruppen von* X. *Es gilt*

$$M = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{M}) \tag{8}$$

dann und nur dann, wenn

$$\prod_{i=1}^{n} M_i(D^{(\lambda)}) = 0 \text{ für alle } \lambda \in L \setminus \{1\} \tag{9}$$

ist.

Beweis: Aus (8) folgt wegen (5) für $\lambda \in L \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} 0 = M(D)^{(\lambda)} &= M_n\{M_{n-1}[\ldots M_1(D^{(\lambda)}(x_1 \cdots x_n))\ldots]\} \\ &= M_n\left\{M_{n-1}\left[\ldots M_1\left(\prod_{i=1}^{n} D^{(\lambda)}(x_i)\right)\ldots\right]\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} M_i(D^{(\lambda)}). \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus (9) und der Linearität von M und $M_{1,\ldots,n}$

$$M = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{D}^{(\lambda)}) \text{ für alle } \lambda \in L$$

und weiter

$$M = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{M}'), \tag{10}$$

wenn $\mathfrak{M}'$ der von $\bigcup_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ aufgespannte lineare Raum ist. Die Behauptung folgt aus Hilfssatz 1 und (10), da $\mathfrak{M}'$ dicht in $\mathfrak{M}$ ist.

Korollar 2. 1. *Es sei* $L = \left\{\lambda \in L^*: \prod_{i=1}^{n} M_i(D^{(\lambda)}) = 0\right\}$ *und* $\mathfrak{G}$ *eine nicht leere zweiseitig invariante Untermenge von* $\mathfrak{F}$ *mit* $M = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{G})$. *Dann gilt* $\mathfrak{G} < \mathfrak{M} = \sum_{\lambda \in L \cup \{1\}} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$, *und* $\mathfrak{M}$ *enthält mit jeder Funktion* f *auch die Funktion* $\bar{f}$.

Beweis: Mit $M = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{G})$ muß auch $M = M_{1,\ldots,n}(\overline{\mathfrak{G}})$ gelten, sowie $M = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{M}'')$, wenn $\mathfrak{M}''$ der kleinste die Menge $\mathfrak{G} \cup \overline{\mathfrak{G}}$ enthaltende Modul in $\mathfrak{F}$ ist. Das Weitere ergibt sich aus einer Anwendung von Satz 2.

Es sei X_0 eine Untergruppe von X und $D^{(\lambda)}$ eine irreduzible Darstellung von X. Wir sagen, daß $D^{(\lambda)}$ eine irreduzible Darstellung $D'^{(\lambda')}$ von X_0 enthält, wenn die Beschränkung von $D^{(\lambda)}$ auf X_0, aufgefaßt als Darstellung von X_0, in vollständig reduzierter Form eine zu $D'^{(\lambda')}$ äquivalente Darstellung von X_0 enthält.

Korollar 2. 2. *Es sei* $\{X_i: i = 1, \ldots, n\}$ *ein System von Untergruppen von* X *und* L *eine Untermenge von* L^* *derart, daß für jeden Index* $\lambda \in L$ *die Darstellung* $D^{(\lambda)}$ *die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe* X_{i_λ} *nicht enthalte. Ist* $\mathfrak{M} = \sum_{\lambda \in L \cup \{1\}} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ *und ist* $(i_1, \ldots, i_n)$ *irgendeine Permutation der Indexfolge* $(1, \ldots, n)$, *so gilt*

$$M = M_{i_1,\ldots,i_n}(\mathfrak{M}).$$

Beweis: Für $\lambda \in L$ gilt nach (5), angewendet auf X_{i_λ}, $M_{i_\lambda}(D^{(\lambda)}) = 0$, also auch $\prod_{k=1}^{n} M_{i_\lambda}(D^{(\lambda)}) = 0$. Aus Satz 2 folgt die Behauptung.

Aus $M = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{M})$ mit $\mathfrak{M} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ folgt im allgemeinen noch nicht, daß für $\lambda \in L \setminus \{1\}$ die Darstellung $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe X_{i_λ} nicht enthält. Die alternierende Gruppe von vier Variablen besitzt vier nicht äquivalente irreduzible Darstellungen $D^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, 3, 4)$. Es seien X_1 bzw. X_2 die von den Permutationen (12) (34) und (13) (24) erzeugten zyklischen Untergruppen der Ordnung 2 und X_3 die von (123) erzeugte zyklische Untergruppe der Ordnung 3. Da X_3 gleichzeitig ein Vertretersystem der Faktorgruppe von X nach dem Normalteiler $X_1 X_2$ ist, enthält der Komplex $X_1 X_2 X_3$ jedes Element von X genau einmal, und es gilt $M = M_{1,2,3}(\mathfrak{F})$. Jedoch enthält $D^{(4)}$ $(s_4 = 3)$ die triviale Darstellung jeder Untergruppe $X_i (i = 1, 2, 3)$ je einmal.

Korollar 2. 3. *Es sei* $\{X_i: i = 1, \ldots, n\}$ *ein System von Untergruppen der Untergruppe* X_0 *von* X *und* L *eine Untermenge von* L^* *derart, daß für jeden Index* $\lambda \in L$ *die Darstellung* $D^{(\lambda)}$ *die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe* X_{i_λ} *genau so oft enthält wie die der Untergruppe* X_0. *Ist* $\mathfrak{M} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ *und ist* $(i_1, \ldots, i_n)$ *irgendeine Permutation der Indexfolge* $(1, \ldots, n)$, *so gilt*

$$M_0 = M_{i_1,\ldots,i_n}(\mathfrak{M}). \tag{11}$$

Beweis: Wir können beim Beweis von (11) nach Definition von M_0 und $M_{1,\ldots,n}$ (s. (4)) den Modul $\mathfrak{M}$ auf X_0 beschränken. Es sei $\mathfrak{M}'$ der so entstehende Modul von fp. Funktionen auf X_0 und $\mathfrak{M}' = \sum_{\lambda' \in L'} \mathfrak{D}'^{(\lambda')}$ die der Formel (6) entsprechende Zerlegung von $\mathfrak{M}'$. Jede irreduzible Darstellung $D'^{(\lambda')}(\lambda' \in L')$ von X_0 muß in mindestens einer irreduziblen Darstellung $D^{(\lambda)}(\lambda \in L)$ von X enthalten sein. Nehmen wir an, $D'^{(\lambda')}(\lambda' \neq 1)$ enthalte die triviale Darstellung jeder Untergruppe $X_i (i = 1, \ldots, n)$ und $D'^{(\lambda')}$ sei in $D^{(\lambda)}$ enthalten.

Wenn $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung von X_0 d-mal enthält, dann enthält also $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung jeder Untergruppe X_i $(d+1)$-mal, im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen. Für X_0 und $\mathfrak{M}'$ treffen also die Voraussetzungen von Korollar 2. 2 zu, und die Behauptung folgt.

In den folgenden Sätzen machen wir Gebrauch von der jeweils durch einen vollen Modul $\mathfrak{A} < \mathfrak{F}$ auf X definierten Topologie $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$, auf die sich jeweils alle topologischen Aussagen über Untermengen von X und Stetigkeit von Funktionen beziehen werden. Hierbei soll $U^{\sim}$ die abgeschlossene Hülle der Untermenge U in X bedeuten. Da X in $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ vollständig regulär und $\mathfrak{A}$ die Algebra aller stetigen Funktionen auf X ist, enthält $\mathfrak{A}$ für jede Umgebung U eines Punktes $x_0 \in X$ eine reellwertige, nicht negative Funktion f, die in x_0 positiv ist und außerhalb von U verschwindet. Wir wollen eine solche Funktion eine zu x_0 und U gehörige Umgebungsfunktion nennen. Wir benötigen später folgende zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 2. *Es seien $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$, ferner A, B und C Untermengen von X und $B^{\sim} = C^{\sim}$. Dann gilt $(AB)^{\sim} = (AC)^{\sim}$.*

Beweis: Es sei $d \in (AB)^{\sim}$ und U eine beliebige Umgebung von d. Dann gibt es Elemente $a \in A$ und $b \in B$ derart, daß $ab \in U$ ist. Nach Satz 1, d) existiert eine Umgebung V von b derart, daß $aV \subset U$ gilt. Wegen $b \in B^{\sim} = C^{\sim}$ gibt es ein Element $c \in C \cap V$. Also gilt $ac \in U$ und $d \in (AC)^{\sim}$, mithin $(AB)^{\sim} \subset (AC)^{\sim}$. Wegen der Symmetrie des Argumentes folgt die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$. Es seien $f \in \mathfrak{A}$, $\varepsilon > 0$ und $a \in X$ beliebig vorgegeben. Dann existiert eine Umgebung U von a derart, daß $\| f_a - f_b \| < \varepsilon$ und $\| {}_a f - {}_b f \| < \varepsilon$ für alle $b \in U$ gilt.*

Beweis. Bei dem durch $\mathfrak{A}$ vermittelten Homomorphismus von X in eine kompakte Hausdorffsche Gruppe X' läßt sich f'' zu einer stetigen Funktion auf X' fortsetzen (s. Satz 1, a)). Die Behauptung folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit dieser Funktion auf X'.

Wir setzen nun unsere Untersuchungen fort und bezeichnen Untergruppen und zugehörige Mittelwerte wieder mit jeweils gleichem Index.

Satz 3. *Es seien $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$ und X_1, X_2 Untergruppen von X. Es gilt*

$$M_1 = M_2(\mathfrak{A}) \tag{12}$$

dann und nur dann, wenn

$$X_1^{\sim} = X_2^{\sim} \tag{13}$$

ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst

$$M_1 = M_1^{\sim}(\mathfrak{A}). \tag{14}$$

Es sei $\mathfrak{A}'$ die Beschränkung von $\mathfrak{A}$ auf $X_1^{\sim}$. Auf $\mathfrak{A}'$ definiert M_1 ein Funktional mit den Eigenschaften (1) 1, 2 und 4. Außerdem ist M_1 invariant gegen Translationen durch Elemente aus X_1. Es sei nun $a \in X_1^{\sim}$ und $f \in \mathfrak{A}$. Für ein beliebig gegebenes $\varepsilon > 0$ wählen wir nach Hilfssatz 3 eine Umgebung U von a so, daß $\| f_a - f_b \| < \varepsilon$ für alle $b \in U$ gilt. Wir wählen ferner ein $b \in U \cap X_1$. Dann gilt

$$| M_1(f'_a) - M_1(f') | = | M_1(f'_a) - M_1(f'_b) | = | M_1(f'_a - f'_b) | \leqq \| f'_a - f'_b \| < \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, gilt $M_1(f'_a) = M_1(f')$. Das Funktional M_1 ist also rechtsinvariant bezüglich Translationen mittels beliebiger Elemente aus $X_1^{\sim}$. Nach der in § 1, Absatz 2 gemachten Bemerkung ist damit (14) bewiesen. Wenden wir (14) auch auf X_2 an, so ergibt sich aus (13) $M_1 = M_1^{\sim} = M_2^{\sim} = M_2(\mathfrak{A})$, also (12).

Es sei nun $X_1^\sim \neq X_2^\sim$ vorausgesetzt, etwa $x_1 \in X_1^\sim$, $x_1 \notin X_2^\sim$. Dann existiert eine zu $X_2^\sim$ fremde Umgebung U von x_1. Es sei $f \in \mathfrak{A}$ eine zugehörige Umgebungsfunktion. Dann ist $M_1(f) = M_1^\sim(f) > 0$ wegen (2), aber $M_2(f) = M_2^\sim(f) = 0$. Aus (12) muß deshalb (13) folgen.

Satz 4. *Es seien $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$ und $\{X_i\colon i = 1, \ldots, n\}$, $\{X'_j\colon j = 1, \ldots, m\}$ zwei Systeme von Untergruppen von X. Aus*

$$M_{1,\ldots,n} = M'_{1,\ldots,m}(\mathfrak{A})$$

folgt

$$(X_1 \cdots X_n)^\sim = (X'_1 \cdots X'_m)^\sim.$$

Beweis: Wir nehmen an, es wäre $x_0 \in (X_1 \cdots X_n)^\sim$, aber $x_0 \notin (X'_1 \cdots X'_m)^\sim$. Es sei U eine zu $(X'_1 \cdots X'_m)^\sim$ fremde Umgebung von x_0 und $\bar{x}_0 = x_1 \cdots x_n \in U \cap (X_1 \cdots X_n)$. Ferner sei $f \in \mathfrak{A}$ eine zu $\bar{x}_0$ und U gehörige Umgebungsfunktion. Dann ist $M_{1,\ldots,n}(f) > 0$, aber $M'_{1,\ldots,m}(f) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt

$$(X_1 \cdots X_n)^\sim < (X'_1 \cdots X'_m)^\sim.$$

Aus der Symmetrie des Argumentes ergibt sich die Behauptung.

Für $X'_1 = X$ folgt unmittelbar:

Korollar 4. 1. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$ und $\{X_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ ein System von Untergruppen von X. Aus*

$$M = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{A})$$

folgt

$$X = (X_1 \cdots X_n)^\sim.$$

Die Umkehrung von Satz 4 bzw. Korollar 4. 1 ist im allgemeinen nicht richtig. Es seien X wieder die alternierende Gruppe von vier Variablen und X_1, X_2 und X_3 beziehungsweise die durch (123), (124) und (134) erzeugten zyklischen Gruppen. Es sei $\mathfrak{A}$ die Menge $\mathfrak{Q}$ aller komplexwertigen Funktionen auf X. Es gilt $X_1 X_2 X_3 = X$. Ferner ist $M_{1,2,3}(f) = \frac{1}{27} \sum_{X_1} \sum_{X_2} \sum_{X_3} f(x_1 x_2 x_3)$ und $M(f) = \frac{1}{12} \sum_X f(x)$ für $f \in \mathfrak{Q}$. Setzen wir $f(e) = 1$, $f(x) = 0 (x \neq e)$, so ist $M(f) = \frac{1}{12}$ und $M_{1,2,3}(f) = \frac{2}{27}$, also $M(f) \neq M_{1,2,3}(f)$.

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$ und $\{X_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ ein System von Untergruppen von X. Gilt für jede zyklische Permutation $(i_1, \ldots, i_n)$ der Indexfolge $(1, \ldots, n)$*

$$M_{i_1,\ldots,i_n} = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{A}), \tag{15}$$

dann gilt für jede solche Permutation auch

$$(X_{i_1} \cdots X_{i_n})^\sim = (X_1 \cdots X_n)^\sim = X_0, \tag{16}$$

die Menge X_0 ist eine Untergruppe von X, und

$$M_0 = M_{1,\ldots,n}(\mathfrak{A}). \tag{17}$$

Beweis: Zunächst folgt (16) aus (15) nach Satz 4. Auf Grund von Satz 1, d) gilt, wie in jeder topologischen Gruppe, für beliebige Untermengen A und B von X und für ein beliebiges Element $c \in X$ sowohl $cA^\sim = (cA)^\sim$, als auch $(A^{-1})^\sim = (A^\sim)^{-1}$ und $A^\sim B^\sim < (AB)^\sim$, was wir im folgenden verwenden werden. Durch mehrfache Anwendung von Hilfssatz 2 und (16) erhalten wir für $x_1 \cdots x_n \in (X_1 \cdots X_n)$

$$\begin{aligned} x_1 \cdots x_n (X_1 \cdots X_n)^\sim &= (x_1 \cdots x_n X_1 \cdots X_n)^\sim \\ &= (x_1 \cdots x_n X_n X_1 \cdots X_{n-1})^\sim \\ &= (x_1 \cdots x_{n-1} X_n X_1 \cdots X_{n-1})^\sim \\ &= \cdots = (x_1 X_1 \cdots X_n)^\sim \\ &= (X_1 \cdots X_n)^\sim. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$(X_1 \cdots X_n)^{-1} \subset (X_1 \cdots X_n)^{\sim}$$

und daher auch

$$[(X_1 \cdots X_n)^{\sim}]^{-1} = [(X_1 \cdots X_n)^{-1}]^{\sim} \subset (X_1 \cdots X_n)^{\sim}. \tag{18}$$

Ferner gilt nach obigem

$$(X_1 \cdots X_n)^{\sim}(X_1 \cdots X_n)^{\sim} \subset [(X_1 \cdots X_n)(X_1 \cdots X_n)^{\sim}]^{\sim} = (X_1 \cdots X_n)^{\sim}. \tag{19}$$

Aus (18) und (19) folgt, daß $X_0 = (X_1 \cdots X_n)^{\sim}$ eine Untergruppe von X ist.

Da das Funktional $M_{1,\ldots,n}$ auf $\mathfrak{A}$ bereits die Eigenschaften (1) 1, 2 und 4 des Mittelwertes M_0 besitzt und wir $\mathfrak{A}$ in (17) auf X_0 beschränken können, genügt es wie im Beweis von Satz 3, die Rechtsinvarianz von $M_{1,\ldots,n}$ gegenüber Translationen durch Elemente von X_0 nachzuweisen. Wir betrachten zunächst Rechtstranslation durch ein Element $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \in (X_1 \cdots X_n)$. Für $f \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\begin{aligned} M_{1,\ldots,n}(f_{\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n}) &= M_{2,\ldots,n,1}(f_{\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n}) \\ &= M_{2,\ldots,n,1}(f_{\bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n}) \\ &= \cdots = M_{1,\ldots,n}(f). \end{aligned}$$

Es seien nun $x_0 \in (X_1 \cdots X_n)^{\sim}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, und U eine Umgebung von x_0 derart, daß $\| f_{x_0} - f_{\bar{x}} \| < \varepsilon$ für alle $\bar{x} \in U$ gilt (s. Hilfssatz 3). Wir wählen ein $\bar{x}_0 \in U \cap (X_1 \cdots X_n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} | M_{1,\ldots,n}(f_{x_0}) - M_{1,\ldots,n}(f) | &= | M_{1,\ldots,n}(f_{x_0}) - M_{1,\ldots,n}(f_{\bar{x}_0}) | \\ &= | M_{1,\ldots,n}(f_{x_0} - f_{\bar{x}_0}) | < \varepsilon, \end{aligned}$$

also

$$M_{1,\ldots,n}(f_{x_0}) = M_{1,\ldots,n}(f).$$

Damit ist der Beweis für (17) erbracht.

Korollar 5. 1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5 sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $(X_1 \cdots X_n)^{\sim} = X$.

b) $M_{1,\ldots,n} = M(\mathfrak{A})$.

c) $M_{1,\ldots,n}(f) > 0$ *für jede Umgebungsfunktion* f *in* $\mathfrak{A}$.

Beweis: Aus a) folgt b) nach Satz 5 und hieraus trivialerweise c) (s. (2)). Setzen wir c) als richtig voraus und nehmen wir an, es existiere ein $x_0 \in X$, $x_0 \notin (X_1 \cdots X_n)^{\sim}$. Dann sei U eine zu $(X_1 \cdots X_n)^{\sim}$ fremde Umgebung von x_0 und f eine zugehörige Umgebungsfunktion in $\mathfrak{A}$. Es folgt $M_{1,\ldots,n}(f) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die kleinste eine nicht leere Untermenge A von X enthaltende $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-abgeschlossene Untergruppe von X werden wir im folgenden als die von A $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-erzeugte Untergruppe bezeichnen. Sie kann auch als die abgeschlossene Hülle aller endlichen Produkte von Elementen aus $A \cup A^{-1}$ in beliebiger Reihenfolge und Wiederholung charakterisiert werden. Insbesondere wird unter den Voraussetzungen von Satz 5 die Untergruppe X_0 von $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-erzeugt. Natürlich kann eine Menge von Untergruppen $X_1, \ldots, X_n$ eine Untergruppe X_0 $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-erzeugen, ohne daß bereits der Komplex $X_1 \cdots X_n$ dicht in X_0 ist. Die symmetrische Gruppe von vier Variablen wird beispielsweise durch die Permutationen (12) und (1234) (schlechthin) erzeugt, während das Produkt der entsprechenden zyklischen Untergruppen nur 8 Elemente enthält.

Auf Grund von Korollar 2. 2 hat die dort erwähnte Voraussetzung für einen vollen Modul $\mathfrak{A}$ die Beziehung $M_{1,\ldots,n} = M(\mathfrak{A})$ zur Folge. Diese hat ihrerseits nach Korollar 4. 1

zur Folge, daß $(X_1 \cdots X_n)^{\sim} = X$ gilt, somit wird X durch $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-erzeugt. Die angegebenen Beispiele zeigen, daß sich keine dieser Aussagen im allgemeinen umkehren läßt. In Sonderfällen können wir jedoch die Implikationskette schließen.

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{A} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$ und $\{X_i : i = 1, \ldots, n\}$ ein System von Untergruppen von X. Wird X $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-erzeugt durch $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ und ist $N_m = X_1 \cdots X_m$ $(m = 1, \ldots, n-1)$ Normalteiler von X, so enthält für jeden Index $\lambda \in L \setminus \{1\}$ die Darstellung $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe X_{i_λ} nicht.*

Die Voraussetzungen von Satz 6 sind insbesondere dann erfüllt, wenn die die Gruppe $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-erzeugenden Untergruppen sämtlich oder mit Ausnahme von X_n Normalteiler von X sind. Wir benötigen zum Beweis folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 4 (*Clifford*). *Es sei $D^{(\lambda)}$ eine irreduzible Darstellung vom Grade s_λ von X. Enthält $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung eines Normalteilers N von X, dann enthält sie diese s_λ-mal.*

Beweis: Nach einem Satz von A. H. Clifford (*s.* [1], S. 534) zerfällt $D^{(\lambda)}$, beschränkt auf den Normalteiler N, in eine Summe konjugierter irreduzibler Darstellungen von N, d. h. ist eine von ihnen D', so hat jede weitere Darstellung D'' die Form $D''(x) = D'(y^{-1}xy)$ für ein gewisses, von D'' abhängendes $y \in X$. Ist D' trivial, so gilt das auch für D''.

Beweis von Satz 6: Wir zeigen zuerst durch vollständige Induktion nach m, daß sich jedes endliche Produkt y von Elementen der Untergruppen $X_i (i = 1, \ldots, m \leqq n)$ in der Form $y = x_1 \cdots x_m$ mit $x_i \in X_i$ schreiben läßt. Dies ist richtig für $m = 1$. Setzen wir die Behauptung für $m < n$ als bewiesen voraus. Es sei nun y ein endliches Produkt von Elementen der ersten $m + 1$ Untergruppen X_i und y enthalte k Faktoren $x_{m+1}^{(j)} \in X_{m+1}$, $x_{m+1}^{(j)} \neq e (j = 1, \ldots, k)$. Ist $k = 1$, so ist das Produkt y' der in y rechts von $x_{m+1}^{(1)}$ stehenden Faktoren in N_m enthalten, also gilt $x_{m+1}^{(1)} y' = y'' x_{m+1}^{(1)}$ mit $y'' \in N_m$. Aus der Induktionsvoraussetzung für m ergibt sich die Behauptung. Setzen wir diese auch für k in y auftretende Faktoren $x_{m+1}^{(j)}$ als richtig voraus, und nehmen wir an, das Element y enthalte $k + 1$ Faktoren $x_{m+1}^{(j)} \in X_{m+1}$, $x_{m+1}^{(j)} \neq e (j = 1, \ldots, k+1)$. Es sei $x_{m+1}^{(k+1)}$ der in y am weitesten rechts stehende Faktor. Nach dem eben benützten Prinzip können wir y in der Form $y''' x_{m+1}^{(k+1)}$ schreiben, wobei y''' nur k von der Einheit verschiedene Faktoren aus X_{m+1} enthält. Aus der Induktionsvoraussetzung für k ergibt sich mit $x_{m+1} = x_{m+1}^{(1)} \cdots x_{m+1}^{(k+1)}$ die Behauptung. Da X von $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-erzeugt wird, gilt bereits $X = (X_1 \cdots X_n)^{\sim}$.

Nehmen wir an, die irreduzible Darstellung $D^{(\lambda)}$ enthalte für ein festes $\lambda \in L$ die triviale Darstellung jeder Untergruppe $X_i (i = 1, \ldots, n)$. Wir zeigen durch Induktion nach m, daß dann $D^{(\lambda)}(y)$ für jedes Element $y \in N_m (m \leqq n-1)$ die Einheitsmatrix ist. Zur Vereinfachung des Beweises setzen wir $N_0 = \{e\}$. Dann ist die Behauptung richtig für $m = 0$. Setzen wir die Richtigkeit der Behauptung für $m < n - 1$ voraus. Es sei $y \in N_{m+1}$, etwa $y = x_m x_{m+1}$, wobei $x_m \in N_m$ und $x_{m+1} \in X_{m+1}$ gelte. Wir denken uns $D^{(\lambda)}$ so transformiert, daß die Beschränkung von $D^{(\lambda)}$ auf X_{m+1} vollständig reduziert erscheint. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $D^{(\lambda)}(y) = D^{(\lambda)}(x_{m+1})$, und $D^{(\lambda)}$ enthält somit die triviale Darstellung von N_{m+1}. Nach Hilfssatz 4 ist $D^{(\lambda)}(y)$ die Einheitsmatrix.

Wir denken uns nun $D^{(\lambda)}$ so transformiert, daß die Beschränkung von $D^{(\lambda)}$ auf X_n vollständig reduziert erscheint. Nach dem eben Bewiesenen gilt für jedes Element y von

der Form $y = x_1 \cdots x_n$ die Gleichung $D^{(\lambda)}(y) = D^{(\lambda)}(x_n)$. Die Darstellung $D^{(\lambda)}$ enthält daher, beschränkt auf $X_1 \cdots X_n$, die triviale Darstellung von X. Zufolge der Stetigkeit von $D^{(\lambda)}$ muß dies auch zutreffen, wenn wir $D^{(\lambda)}$ auf $X = (X_1 \cdots X_n)^{\sim}$ betrachten. $D^{(\lambda)}$ muß also die triviale Darstellung von X sein. Satz 6 ist damit bewiesen.

Korollar 6. 1. *Es sei* $\mathfrak{A} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ *ein voller Modul in* $\mathfrak{F}$ *und* $\{X_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ *ein System von Untergruppen der Abelschen Gruppe* X. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Jede Darstellung* $D^{(\lambda)}(\lambda \in L \setminus \{1\})$ *enthält die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe* X_{i_λ} *nicht.*

b) $M_{1,\ldots,n} = M(\mathfrak{A})$.

c) $(X_1 \cdots X_n)^{\sim} = X$.

d) X *wird* $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$*-erzeugt durch* $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$.

Beweis: Aus a) folgt b) nach Korollar 2. 2. Aus b) folgt c) nach Korollar 4. 1. Aus c) folgt d) trivialerweise. Aus d) folgt a) nach Satz 6.

Korollar 6. 2. *Es sei* $\mathfrak{A} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ *ein voller Modul in* $\mathfrak{F}$ *und* $\{X_i\colon i = 0, 1, \ldots, n\}$ *ein System von Untergruppen der Abelschen Gruppe* X. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Im Modul* $\{D^{(\lambda)}\colon \lambda \in L\}$ *sind genau jene Darstellungen trivial auf* X_0, *die auf sämtlichen Untergruppen* $X_1, \ldots, X_n$ *trivial sind.*

b) $M_{1,\ldots,n} = M_0(\mathfrak{A})$

d) $(X_1 \cdots X_n)^{\sim} = X_0$

d) $X_0^{\sim}$ *wird* $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$*-erzeugt von* $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$.

Beweis: Wir bemerken, daß alle Darstellungen $D^{(\lambda)}(\lambda \in L)$ vom ersten Grade sind. Aus a) folgt b), da beide Funktionale auf den Koeffizienten des Systems $\{D^{(\lambda)}\colon \lambda \in L\}$ übereinstimmen. Aus b) folgt c) nach Satz 4. Aus c) folgt d) trivialerweise. Setzen wir nun d) als richtig voraus. Ist $D^{(\lambda)}$ trivial auf X_0, dann gilt dies zufolge der Stetigkeit von $D^{(\lambda)}$ auch für $X_0^{\sim}$ und die in $X_0^{\sim}$ enthaltenen Untergruppen $X_1, \ldots, X_n$. Ist umgekehrt $D^{(\lambda)}$ trivial auf sämtlichen Untergruppen $X_1, \ldots, X_n$, so zufolge der Stetigkeit von $D^{(\lambda)}$ (oder auch zufolge Satz 6) auch auf $(X_1 \cdots X_n)^{\sim} = X_0^{\sim}$, also auch auf X_0. Es folgt a).

Wir führen noch einige Beispiele für die angegebenen Sätze an. Es sei X die alternierende Gruppe von 5 Variablen, ferner X_1 die durch (12345) und (12) (34) erzeugte Diedergruppe der Ordnung 10 und X_2 die alternierende Gruppe von 4 Variablen, erzeugt durch (123) und (12) (34). Ferner sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} = \mathfrak{Q}$ der Modul aller komplexwertigen Funktionen auf X. Auf X_1 und X_2 treffen die Voraussetzungen des Korollars 2. 2 zu (s. z. B. [2], S. 375). Also ist $M = M_{1,2} = M_{2,1}(\mathfrak{F})$ und $X = X_1 X_2 = X_2 X_1$. Unter den 120 Elementen der Komplexe $X_1 X_2$ bzw. $X_2 X_1$ kommt jedes Element von X genau zweimal vor.

Als nächstes sei X die kompakte Diedergruppe des Kreises. Wir erhalten sie aus der Gruppe X_1 der komplexen Zahlen von Absolutbetrag 1, indem wir beispielsweise X_1 auf ein zweites Exemplar X_1' des Einheitskreises kongruent abbilden, aber für die Elemente x_1', y_1' aus X_1' die Multiplikation durch

$$x_1' y_1 = (x_1 y_1)', \quad x_1 y_1' = (x_1^{-1} y_1)', \quad x_1' y_1' = x_1^{-1} y_1$$

definieren. Insbesondere folgt $x_1'^2 = e$. Die Vereinigung beider Kreise ist eine nicht zusammenhängende, aus zwei Komponenten bestehende nicht Abelsche kompakte Gruppe,

da die Gruppenoperationen, wie oben definiert, in der auf beiden Kreisen vorliegenden natürlichen Topologie stetig sind. Es ist X_1 die Komponente der Einheit, als X_2 wählen wir die Gruppe $\{e, e'\}$. Es sei $\mathfrak{A}$ der volle Modul aller stetigen Funktionen aus X, d. h. die Menge aller Paare stetiger Funktionen auf den Kreisen X_1 und X_1'. Auf X_1 und X_2 treffen die Voraussetzungen von Satz 6 zu, also gilt $M = M_{1,2}(\mathfrak{A})$ nach Satz 6 und Kollar 2. 2. Ist s die Bogenlänge auf dem Einheitskreis von e bis $x(s)$, gemessen in positiver Richtung, so ist für $f \in \mathfrak{A}$

$$M_1(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x(s))\, ds$$

und

$$M_2(f) = \frac{1}{2}\,[f(e) + f(e')].$$

Es gilt also

$$M(f) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} [f(x(s)) + f(x'(s))\, ds.]$$

Die letzte Formel ist in diesem Falle natürlich auch direkt leicht ableitbar.

Ist schließlich X_1 eine Untergruppe von X, so erfüllen trivialerweise X_1 und $X_2 = X$ die Voraussetzungen von Korollar 2. 2, wenn $\mathfrak{A} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ irgendein voller Modul in $\mathfrak{F}$ ist. Für $f \in \mathfrak{A}$ gilt

$$M(f) = M_{1,2}(f) = M_2[M_1(f(x_1 x_2))].$$

Die durch

$$f'(x) = M_1(f_x) \tag{20}$$

definierte Funktion f' ist fp. auf X und konstant auf Rechtsrestklassen von X_1. Für $f = d_{ik}^{(\lambda)} (\lambda \in L,\ 1 \leq i,\ k \leq s_\lambda)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} d_{ik}^{(\lambda)\prime}(x) &= M_1(d_{ik}^{(\lambda)}(x_1 x)) \\ &= M_1\left(\sum_{j=1}^{s_\lambda} d_{ij}^{(\lambda)}(x_1)\, d_{jk}^{(\lambda)}(x)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{s_\lambda} M_1(d_{ij}^{(\lambda)})\, d_{jk}^{(\lambda)}(x), \end{aligned}$$

also gilt $d_{ik}^{(\lambda)\prime} \in \mathfrak{A}$. Da jede Funktion $f \in \mathfrak{A}$ gleichmäßig durch endliche Linearkombinationen der Koeffizienten $d_{ik}^{(\lambda)}$ approximiert wird, wird auch die zugehörige Funktion f' durch Linearkombinationen der Funktionen $d_{ik}^{(\lambda)\prime}$ gleichmäßig approximiert. Es ist mit f also auch f' in $\mathfrak{A}$ enthalten. Für jede Funktion $g \in \mathfrak{A}$, die auf Rechtsrestklassen von X_1 konstant ist, gilt

$$g(x) = M_1(g(x_1 x)) = g'(x),$$

daher ist g in $\mathfrak{A}' = \{f' : f \in \mathfrak{A}\}$ enthalten. Es ist also $\mathfrak{A}'$ identisch mit der Algebra aller Funktionen aus $\mathfrak{A}$, die auf Rechtsrestklassen von X_1 konstant sind. Aus einer Anwendung von [7], Satz III folgt wieder, daß $\mathfrak{A}'$ die Algebra aller beschränkten komplexwertigen $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}')$-stetigen Funktionen auf X ist. $\mathfrak{A}'$ ist rechtsinvariant, aber im allgemeinen nicht zweiseitig invariant.

Es sei p die Projektion von X auf den Rechtsrestklassenraum $X'' = X/X_1$ und q eine Auswahlfunktion auf X'', die jedem Element $x'' \in X''$ ein Element der zugehörigen Restklasse von X_1 zuordnet. Es ist $p \circ q$ die identische Abbildung von X'' auf sich selbst und $q \circ p$ eine Abbildung jeder Rechtsrestklasse von X_1 in sich selbst. Ist $\mathfrak{A}''$ die Algebra

aller stetigen beschränkten komplexwertigen Funktionen auf X'' in der Quotiententopologie für X'', so ist durch

$$f'' = f' \circ q, \quad f' = f'' \circ p \tag{21}$$

ein isometrischer Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ definiert (s. [5], 28 C).

Auf $\mathfrak{A}''$ definieren wir ein lineares, (sogar im Sinne von (2)) monotones und normiertes Funktional M'' durch

$$M''(f'') = M(f'' \circ p), \quad f'' \in \mathfrak{A}''. \tag{22}$$

Dies ist sinnvoll, da nach (21) $f'' \circ p$ in $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Das Funktional M'' ist in dem Sinne rechtsinvariant, daß für $a \in X$ und $f'' \in \mathfrak{A}''$ gilt:

$$\begin{aligned} M''(f''_a) &= M''(f''(xa)'') = M(f'' \circ p(xa)) \\ &= M(f'' \circ p) = M''(f''). \end{aligned}$$

Ist f eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{A}$, dann gilt nach (20) und (21) für die zugehörige Funktion $f'' \in \mathfrak{A}''$

$$f''(x'') = f' \circ q(x'') = M_1(f_{q(x'')}).$$

Ferner gilt nach (22) und (21), da f' auf Rechtsrestklassen von X_1 konstant ist,

$$\begin{aligned} M''(f'') &= M(f'' \circ p) = M\{M_1[f(x_1 \cdot q \circ p(x))]\} \\ &= M\{M_1[f(x_1 x)]\} = M(f). \end{aligned}$$

Durch die Forderung $M''(f'') = M(f)$ für alle $f \in \mathfrak{A}$ ist das Funktional M'' auf $\mathfrak{A}''$ eindeutig bestimmt, da jede Funktion in $\mathfrak{A}''$ Bild einer Funktion aus $\mathfrak{A}$ ist. Wir haben damit folgendes bewiesen:

Satz 7. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$, X_1 eine Untergruppe von X, X'' der Rechtsrestklassenraum von X_1 in X mit der durch $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ bestimmten Quotiententopologie und $\mathfrak{A}''$ die Algebra aller stetigen beschränkten komplexwertigen Funktionen auf X''. Ferner sei p die Projektion von X auf X'' und q eine Auswahlfunktion von X'' in X.*

Für jede Funktion $f \in \mathfrak{A}$ ist die durch

$$f''(x'') = M_1(f_{q(x'')})$$

definierte Funktion f'' in $\mathfrak{A}''$ enthalten, und für jede Funktion $f'' \in \mathfrak{A}''$ ist die Funktion $f'' \circ p$ in $\mathfrak{A}$ enthalten. Auf $\mathfrak{A}''$ läßt sich auf eine und nur eine Weise ein lineares, monotones und normiertes Funktional M'' derart definieren, daß für jede Funktion $f \in \mathfrak{A}$

$$M(f) = M''\{M_1[f(x_1 q(x''))]\}$$

gilt, und zwar ist für jede Funktion $f'' \in \mathfrak{A}''$

$$M''(f'') = M(f'' \circ p).$$

Korollar 7. 1. *Ist unter den Voraussetzungen von Satz 7 die Untergruppe X_1 Normalteiler von X, so ist $\mathfrak{A}''$ ein voller Modul von fp. Funktionen auf X'' und M'' der zugehörige Mittelwert.*

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus der Definition einer fp. Funktion und Satz 1, c), die zweite aus der Rechtsinvarianz von M''.

§ 4. Unendliche Zerlegungen des Mittelwertes.

Wir übertragen nun die Ergebnisse des vorangehenden Paragraphen auf ein unendliches, nicht notwendigerweise abzählbares System von Untergruppen der Gruppe X.

Eine beliebige indizierte Menge $\mathfrak{N} = \{\Phi_\tau : \tau \in T\}$ bezeichnen wir als ein Netz, wenn die Indexmenge T aufwärts gerichtet, d. h. derart teilweise geordnet ist, daß für je zwei Indizes $\tau_1, \tau_2 \in T$ ein Index $\tau_3 \in T$ mit $\tau_1 < \tau_3$, $\tau_2 < \tau_3$ existiert. Wir schreiben für

$\tau_1 < \tau_2$ auch $\Phi_{\tau_1} < \Phi_{\tau_2}$. Ein Netz $\mathfrak{N}' = \{\Psi_\sigma : \sigma \in S\}$ heißt ein Unternetz von $\mathfrak{N}$, wenn es eine Funktion t von S in T mit folgenden beiden Eigenschaften gibt (s. [4], S. 70):

(23) $$\Psi_\sigma = \Phi_{t(\sigma)} \text{ für alle } \sigma \in S;$$

(24) zu jedem Index $\tau_0 \in T$ existiert ein Index $\sigma_0 \in S$ derart, daß $t(\sigma) > \tau_0$ gilt, sobald $\sigma > \sigma_0$ ist.

Wir nennen $\mathfrak{N} = \{\Phi_\tau : \tau \in T\}$ ein Netz in der Menge Q, wenn $\Phi_\tau \in Q$ für alle $\tau \in T$ gilt.

Zu jedem Modul $\mathfrak{M} < \mathfrak{E}$ bildet die Menge aller beschränkten linearen Funktionale auf $\mathfrak{M}$ den zu $\mathfrak{M}$ konjugierten Banachraum $\mathfrak{M}^*$. Ein Netz $\mathfrak{N} = \{\Phi_\tau : \tau \in T\}$ in $\mathfrak{M}^*$ konvergiert in der schwachen Topologie (für $\mathfrak{M}^*$) gegen ein Funktional $\Phi \in \mathfrak{M}^*$, wenn zu jeder Funktion $f \in \mathfrak{M}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $\tau(f, \varepsilon)$ existiert derart, daß

$$|\Phi_\tau(f) - \Phi(f)| < \varepsilon \text{ ist für alle } \tau \in T, \text{ für die } \tau > \tau(f, \varepsilon) \text{ gilt.}$$

Wir schreiben dafür

$$\lim_{\mathfrak{N}} \Phi_\tau = \Phi(\mathfrak{M}).$$

Die Einheitskugel $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{M}^*$, d. h. die Menge aller Funktionale $\Phi \in \mathfrak{M}^*$, für deren Norm die Ungleichung

$$\|\Phi\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\Phi(f)| \leqq 1$$

gilt, ist kompakt in der schwachen Topologie (s. [5], 9 B).

Es sei ein Modul $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{F}$ und ein System $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ von Untergruppen X gegeben. Unter einem Indexsystem (ϱ_i) werden wir künftig immer eine endliche geordnete Indexmenge $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ verstehen. Wir bilden zu jedem Indexsystem $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ nach (4) das zugehörige beschränkte lineare Funktional $M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}$. In der Menge aller dieser Funktionale bzw. Indexsysteme führen wir eine Teilordnung $<$ ein, indem wir

$$M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n} < M_{\sigma_1, \ldots, \sigma_m} \text{ durch } \{\varrho_1, \ldots, \varrho_n\} < \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$$

definieren. Aus $M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n} < M_{\sigma_1, \ldots, \sigma_m}$ und $M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n} > M_{\sigma_1, \ldots, \sigma_m}$ folgt also nicht notwendigerweise $M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n} = M_{\sigma_1, \ldots, \sigma_m}(\mathfrak{M})$. Da alle Funktionale $M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}$ der Einheitskugel $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{M}^*$ angehören, besitzt das so erhaltene Netz $\mathfrak{N} = \{M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}\}$ jedenfalls Häufungspunkte in $\mathfrak{E}$, die wegen (1) 2 und $M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}(1) = 1$ sogar monotone normierte Funktionale sein müssen. Wir werden im folgenden untersuchen, unter welchen Umständen das Netz $\mathfrak{N} = \{M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}\}$ oder gewisse Unternetze gegen den zu einer Untergruppe X_0 gehörigen Mittelwert M_0 konvergieren. Solche Unternetze erhalten wir beispielsweise, wenn wir nur gewisse Indexsysteme (ϱ_i) zulassen, sofern die zugelassenen Indexsysteme noch eine in der ursprünglichen Teilordnung aufwärts gerichtete Menge bilden. Wir deuten dies durch die Schreibung $\mathfrak{N} = \{M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$ an. Wenn wir in der Indexmenge R eine Ordnung einführen, so ist diese von der oben definierten Teilordnung für die Indexsysteme (ϱ_i) getrennt zu halten.

Satz 8. *Es sei $\mathfrak{M} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ ein Modul in $\mathfrak{F}$ und $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ein System von Untergruppen von X. Ferner sei $\mathfrak{N} = \{M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$ ein Netz von Funktionalen $M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}$. Es gilt*

(25) $$\lim_{\mathfrak{N}} M_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n} = M(\mathfrak{M})$$

dann und nur dann, wenn

(26) $$\lim_{\mathfrak{N}} \prod_{i=1}^{n} M_{\varrho_i}(D^{(\lambda)}) = 0 \text{ für alle } \lambda \in L \setminus \{1\}$$

ist.

Beweis: Ist (25) erfüllt, so folgt (26) wie im Beweis von Satz 2. Es sei umgekehrt (26) erfüllt und $f \in \mathfrak{M}$, sowie $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Es existiert eine endliche Linearkombination

$$l = \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\lambda_n} \sum_{i,k=1}^{s_\lambda} \alpha_{ik}^{(\lambda)} d_{ik}^{(\lambda)} \quad \lambda_j \in L \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

derart, daß $\| f - l \| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Aus (26) folgt $\lim\limits_{\mathfrak{N}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}(l) = M(l)$. Daher gibt es ein $M' \in \mathfrak{N}$ derart, daß

$$| M(l) - M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}(l) | < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} > M'$$

ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} | M(f) - M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}(f) | &\leqq | M(f) - M(l) | + | M(l) - M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}(l) | \\ &\quad + | M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}(l) - M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}(f) | \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ für alle } M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} > M'. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Korollar 8. 1. *Es sei $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ein System von Untergruppen von X,*

$$\mathfrak{N} = \{M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$$

ein Netz von Funktionalen $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$ und $L = \left\{ \lambda \in L^* : \lim\limits_{\mathfrak{N}} \prod\limits_{i=1}^{n} M_{\varrho_i}(D^{(\lambda)}) = 0 \right\}$. Ferner sei $\mathfrak{G}$ eine nicht leere zweiseitig invariante Untermenge von $\mathfrak{F}$ mit $\lim\limits_{\mathfrak{N}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = M(\mathfrak{G})$. Dann gilt $\mathfrak{G} < \mathfrak{M} = \sum\limits_{\lambda \in L \cup \{1\}} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$, und $\mathfrak{M}$ enthält mit jeder Funktion f auch die Funktion $\bar{f}$.

Beweis: analog zum Beweis von Korollar 2. 1.

Korollar 8. 2. *Es sei $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ein System von Untergruppen von X und L eine Untermenge von L^* derart, daß für jeden Index $\lambda \in L$ die Darstellung $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe X_{ϱ_λ} nicht enthalte. Ist $\mathfrak{M} = \sum\limits_{\lambda \in L \cup \{1\}} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ und ist $\mathfrak{N} = \{M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}\}$ das Netz aller Funktionale $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$, so gilt*

$$\lim_{\mathfrak{N}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = M(\mathfrak{M}).$$

Beweis: Wie im Beweis von Korollar 2. 2 gilt für jeden Index $\lambda \in L$

$$\prod_{i=1}^{n} M_{\varrho_i}(D^{(\lambda)}) = 0 \text{ für alle } (\varrho_1, \ldots, \varrho_n) > (\varrho_\lambda).$$

Aus Satz 8 folgt dann die Behauptung.

Korollar 8. 3. *Es sei $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ein System von Untergruppen der Untergruppe X_0 von X und L eine Untermenge von L^* derart, daß für jeden Index $\lambda \in L$ die Darstellung $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe X_{ϱ_λ} genau so oft enthält wie die der Untergruppe X_0. Ist $\mathfrak{M} = \sum\limits_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ und ist $\mathfrak{N} = \{M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}\}$ das Netz aller Funktionale $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$, so gilt*

$$\lim_{\mathfrak{N}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = M_0(\mathfrak{M}).$$

Beweis: analog zum Beweis von Korollar 2. 3.

In den folgenden Sätzen bedeutet $\bigcup\limits_{\mathfrak{N}}$ die Vereinigung über alle in $\mathfrak{N}$ zugelassenen Indexsysteme (ϱ_i).

Satz 9. *Es seien $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$, $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ und $\{X_\sigma : \sigma \in S\}$ zwei Systeme von Untergruppen von X, sowie $\mathfrak{N}_R = \{M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$ und $\mathfrak{N}_S = \{M_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m} : (\sigma_j) \in (S)\}$ zwei konvergente Netze von Funktionalen $M_{\tau_1,\ldots,\tau_k}$, die folgende Bedingung erfüllen:*

(27) *Ist $f \in \mathfrak{A}$ eine Umgebungsfunktion und $M_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(f) > 0$ für mindestens ein zugelassenes Indexsystem $(\tau_i) \in (T)$, dann ist $\lim\limits_{\mathfrak{R}_T} M_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(f) > 0$.*

Dann folgt aus

$$\lim_{\mathfrak{R}_R} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = \lim_{\mathfrak{R}_S} M_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}(\mathfrak{A}) \tag{28}$$

die Gleichung

$$\Big(\bigcup_{\mathfrak{R}_R} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim} = \Big(\bigcup_{\mathfrak{R}_S} X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_m}\Big)^{\sim}. \tag{29}$$

Beweis: Es sei $x_0 \in \Big(\bigcup\limits_{\mathfrak{R}_S} X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_m}\Big)^{\sim}$, $x_0 \notin \Big(\bigcup\limits_{\mathfrak{R}_R} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim}$ und U eine zu $\Big(\bigcup\limits_{\mathfrak{R}_R} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim}$ fremde Umgebung von x_0. Wir wählen ein Element $\bar{x}_0 = x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_m} \in U \cap \Big(\bigcup\limits_{\mathfrak{R}_S} X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_m}\Big)$. Es sei $f \in \mathfrak{A}$ eine zu $\bar{x}_0$ und U gehörige Umgebungsfunktion. Dann ist $M_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}(f) > 0$, also $\lim\limits_{\mathfrak{R}_S} M_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}(f) > 0$, aber $\lim\limits_{\mathfrak{R}_R} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}(f) = 0$ im Widerspruch zu (28). Analog schließen wir in der anderen Richtung und erhalten (29).

Korollar 9. 1. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$, $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ein System von Untergruppen der Untergruppe X_0 von X und $\mathfrak{R} = \{M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$ ein Netz von Funktionalen $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$. Aus*

$$\lim_{\mathfrak{R}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = M_0(\mathfrak{A})$$

folgt

$$\Big(\bigcup_{\mathfrak{R}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim} = X_0^{\sim}.$$

Beweis: Es gilt jedenfalls $\Big(\bigcup\limits_{\mathfrak{R}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim} < X_0^{\sim}$. Die Einschließung in der anderen Richtung folgt aus dem Beweis von Satz 9, wenn wir dort das System $\{X_\sigma : \sigma \in S\}$ durch $\{X_0\}$, also $\bigcup\limits_{\mathfrak{R}_S} X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_m}$ durch X_0 ersetzen. Die Netze $\mathfrak{R}_R = \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_S = \{M_0\}$ sind nämlich konvergent, und $\mathfrak{R}_S = \{M_0\}$ erfüllt die im Beweis erforderliche Voraussetzung (27). Für $X_0 = X$ erhalten wir

Korollar 9. 2. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$, $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ein System von Untergruppen von X und $\mathfrak{R} = \{M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$ ein Netz von Funktionalen $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$. Aus*

$$\lim_{\mathfrak{R}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = M(\mathfrak{A})$$

folgt

$$\Big(\bigcup_{\mathfrak{R}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim} = X.$$

Satz 10. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$ und $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ein System von Untergruppen von X. Die Indexmenge R sei durch $<$ vollständig geordnet. Im Netz*

$$\mathfrak{R} = \{M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$$

von Funktionalen $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$ seien mindestens alle Indexsysteme $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ mit $\varrho_1 < \cdots < \varrho_n$ zugelassen und mit jedem solchen Indexsystem auch alle, die aus ihm durch zyklische Permutationen entstehen. Es sei $\mathfrak{R}$ konvergent und die Bedingung (27) für $\mathfrak{R}$ erfüllt. Dann ist

$$\Big(\bigcup_{\substack{\varrho_1 < \cdots < \varrho_n \\ (\varrho_i) \in (R)}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim} = X_0 \tag{30}$$

eine Untergruppe von X und

$$\lim_{\mathfrak{R}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = M_0(\mathfrak{A}). \tag{31}$$

Beweis: In (30) erfolgt die Vereinigung über alle in $\mathfrak{N}$ zugelassenen Indexsysteme, deren Anordnung mit der vollständigen Ordnung in R übereinstimmt. Wir zeigen zunächst, daß in (30) die Beschränkung auf diese Indexsysteme unwesentlich ist. Nehmen wir an, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ wäre ein in $\mathfrak{N}$ zugelassenes Indexsystem und das Element $x_0 = x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_m} \in X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_m}$ wäre nicht in X_0 enthalten. Dann sei U eine zu X_0 fremde Umgebung von x_0 und $f \in \mathfrak{A}$ eine zugehörige Umgebungsfunktion. Wir erhalten $M_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}(f) > 0$, aber $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}(f) = 0$ für alle Indexsysteme $(\varrho_i) \in (R)$ mit $\varrho_1 < \cdots < \varrho_n$, im Widerspruch zur Voraussetzung $\lim\limits_{\mathfrak{N}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}(f) > 0$. Also folgt

$$\Big(\bigcup_{\mathfrak{N}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim} = X_0.$$

Wir wählen nun den Index $\varrho \in R$ beliebig und bilden die Menge

$$\Big(\bigcup_{\substack{\sigma_1 = \varrho \\ (\sigma_i) \in (R)}} X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_m}\Big)^{\sim} = X_0'.$$

Die Vereinigung erfolgt hier über alle in $\mathfrak{N}$ zugelassenen Indexsysteme mit dem Anfangsglied ϱ. Offenbar gilt $X_0' < X_0$. Der gleiche Schluß wie oben zeigt, daß für alle in $\mathfrak{N}$ zugelassenen Indexsysteme $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ der Komplex $X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}$ in X_0' enthalten ist. Es gilt also $X_0' = X_0$.

Es sei nun $x_0 = x_{\varrho_1} \cdots x_{\varrho_n}$ ein beliebiges Element aus der Menge $\Big(\bigcup\limits_{\mathfrak{N}} X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_m}\Big)$ und $x_{\varrho_i} \in X_{\varrho_i} (i = 1, \ldots, n)$. Unter Zuhilfenahme der gleichen Beziehungen, die wir zum Beweis von Satz 5 verwendet haben, erhalten wir

$$\begin{aligned} x_0 X_0 &= \Big[x_{\varrho_1} \cdots x_{\varrho_n} \Big(\bigcup_{\substack{\sigma_1 = \varrho_n \\ (\sigma_i) \in (R)}} X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_m}\Big)\Big]^{\sim} \\ &= \Big[x_{\varrho_1} \cdots x_{\varrho_{n-1}} \Big(\bigcup_{\substack{\sigma_1 = \varrho_{n-1} \\ (\sigma_i) \in (R)}} X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_m}\Big)\Big]^{\sim} = \cdots \\ &= \Big[x_{\varrho_1} \Big(\bigcup_{\substack{\sigma_1 = \varrho_1 \\ (\sigma_i) \in (R)}} X_{\sigma_1} \cdots X_{\sigma_m}\Big)\Big]^{\sim} = X_0. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\Big(\bigcup_{\mathfrak{N}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{-1} < X_0,$$

daher auch

$$X_0^{-1} = \Big[\Big(\bigcup_{\mathfrak{N}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{-1}\Big]^{\sim} < X_0. \tag{32}$$

Ferner folgt aus obigem

$$\begin{aligned} \Big(\bigcup_{\mathfrak{N}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim} \Big(\bigcup_{\mathfrak{N}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim} &< \Big[\Big(\bigcup_{\mathfrak{N}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)\Big(\bigcup_{\mathfrak{N}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim}\Big]^{\sim} \\ &= \Big(\bigcup_{\mathfrak{N}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\Big)^{\sim}. \end{aligned} \tag{33}$$

Aus (32) und (33) folgt, daß X_0 eine Untergruppe von X ist.

Nach der zu Beginn dieses Paragraphen gemachten Bemerkung muß das Netz $\mathfrak{N}$ gegen ein lineares monotones normiertes Funktional konvergieren, das wir mit $\overline{M}$ bezeichnen. Bezeichnen wir mit f' die Beschränkung der Funktion $f \in \mathfrak{A}$ auf X_0, so gilt nach (4) $\overline{M}(f) = \overline{M}(f')$, da alle Untergruppen $X_\varrho (\varrho \in R)$ in X_0 enthalten sind. Zum Beweis von (31) genügt es daher wieder zu zeigen, daß $\overline{M}$ invariant gegenüber Rechtstranslationen durch Elemente aus X_0 ist. Wir betrachten zunächst wie oben ein beliebiges Element $x_0 = x_{\varrho_1} \cdots x_{\varrho_n}$ aus der Menge $\Big(\bigcup\limits_{\mathfrak{N}} X_{\sigma_1} \ldots X_{\sigma_m}\Big)$ mit $x_{\varrho_i} \in X_{\varrho_i} (i = 1, \ldots, n)$ und

eine beliebige Funktion $f \in \mathfrak{A}$. Wegen $f_{yz} = (f_z)_y$ können wir uns darauf beschränken, für ein beliebiges Element $x_\varrho \in X_\varrho$ $(\varrho \in R)$ und eine beliebige Funktion $f \in \mathfrak{A}$ die Gleichung $\overline{M}(f_x) = \overline{M}(f)$ zu zeigen. Wegen der Konvergenz von $\mathfrak{R}$ gegen $\overline{M}$ existiert zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein (von f, x_ϱ und ε abhängiges) Funktional $M' > M_\varrho$ in $\mathfrak{R}$ derart, daß für alle Funktionale $M_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m} > M'$ in $\mathfrak{R}$

$$|\overline{M}(f_{x_\varrho}) - M_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}(f_{x_\varrho})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$|\overline{M}(f) - M_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}(f)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Wählen wir das Indexsystem $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ so, daß $\sigma_m = \varrho$ ist, so folgt

$$M_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}(f_{x_\varrho}) = M_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}(f)$$

und

$$|\overline{M}(f_{x_\varrho}) - \overline{M}(f)| < \varepsilon,$$

also $\overline{M}(f_{x_\varrho}) = \overline{M}(f)$. Da die Menge $\left(\bigcup_{\mathfrak{R}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\right)$ dicht in X_0 ist, schließen wir wie im Beweis von Satz 5, daß $\overline{M}$ invariant gegenüber Rechtstranslationen mittels beliebiger Elemente aus X_0 ist. Damit ist (31) gezeigt.

Korollar 10. 1. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 10 *sind die folgenden Aussagen äquivalent*:

a) $\left(\bigcup_{\substack{\varrho_1 < \cdots < \varrho_n \\ (\varrho_i) \in (R)}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\right)^{\sim} = X.$

b) $\lim_{\mathfrak{R}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = M(\mathfrak{A})$.

c) $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}(f) > 0$ *für jede Umgebungsfunktion* $f \in \mathfrak{A}$ *und mindestens ein von* f *abhängiges zugelassenes Indexsystem* (ϱ_i).

Beweis: analog zum Beweis von Korollar 5. 1.

Korollar 10. 2. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *ein voller Modul in* $\mathfrak{F}$ *und* $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ *ein System von Untergruppen von* X, *das unter Einschließung vollständig geordnet ist. Ferner sei* $\mathfrak{R}' = \{M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}\}$ *das Netz aller Funktionale* $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$ *und* $\mathfrak{R} = \{M_\varrho : \varrho \in R\}$ *das Netz der Funktionale* M_ϱ *in der vollständigen Ordnung von* R. *Dann ist*

$$\left(\bigcup_{\mathfrak{R}'} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\right)^{\sim} = \left(\bigcup_{\varrho \in R} X_\varrho\right)^{\sim} = X_0$$

eine Untergruppe von X *und*

$$\lim_{\mathfrak{R}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = \lim_{\mathfrak{R}} M_\varrho = M_0(\mathfrak{A}).$$

Beweis: Wir schreiben $\varrho_1 < \varrho_2$, wenn $X_{\varrho_1} < X_{\varrho_2}$ zutrifft, und $\max(\varrho_i)$ für $\max\{\varrho_i : i = 1, \ldots, n\}$. Aus der Voraussetzung folgt unmittelbar, daß

$$\left(\bigcup_{\mathfrak{R}'} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\right) = \left(\bigcup_{\varrho \in R} X_\varrho\right)$$

und damit auch X_0 eine Untergruppe von X ist. Außerdem gilt nach (4)

$$M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = M_{\max(\varrho_i)}(\mathfrak{F}). \tag{34}$$

Ist ein Index ϱ gegeben, so gilt für jedes Indexsystem $(\varrho_i) > (\varrho)$

$$\max(\varrho_i) > \varrho.$$

Nach (23) und (24) ist also $\mathfrak{N}'$ ein Unternetz von $\mathfrak{N}$. Da die Einheitskugel $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{A}^*$ kompakt ist, muß mindestens ein Unternetz $\mathfrak{N}'' = \{M''_\sigma : \sigma \in S\}$ von $\mathfrak{N}$ konvergieren (s. [4], S. 136). Es sei die Teilordnung in $\mathfrak{N}''$ ebenfalls mit $>$ bezeichnet und

$$M'' = \lim_{\mathfrak{N}''} M''_\sigma(\mathfrak{A}).$$

Es sei ferner ein Element $x_\varrho \in X_\varrho$ $(\varrho \in R)$ beliebig gegeben. Nach (24) existiert ein Index $\sigma_0 \in S$ derart, daß $M''_\sigma = M_{\varrho(\sigma)}$ und $\varrho(\sigma) > \varrho$ für alle Indizes $\sigma > \sigma_0$ $(\sigma \in S)$ gilt. Dann ist M''_σ invariant gegenüber Translation mittels x_ϱ. Das gleiche muß dann für $M'' = \lim_{\mathfrak{N}''} M''_\sigma$ der Fall sein. Da x_ϱ ein beliebiges Element aus der Menge $\bigcup_{\varrho \in R} X_\varrho$ war, die dicht in X_0 ist, folgt wie oben $M'' = M_0(\mathfrak{A})$. Jedes konvergente Unternetz von $\mathfrak{N}$ konvergiert also gegen M_0.

Wir nehmen an, es wäre $\mathfrak{N}$ selbst nicht konvergent. Dann existiert eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von M_0 in $\mathfrak{A}^*$ mit folgender Eigenschaft: zu jedem Funktional M_ϱ in $\mathfrak{N}$ existiert ein Funktional $M_{\varrho_1} \in \mathfrak{N} \cap (\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{U})$ mit $M_{\varrho_1} > M_\varrho$. Die Funktionale M_{ϱ_1} dieser Art bilden nach (23) und (24) in der ursprünglichen Ordnung von $\mathfrak{N}$ ein Unternetz $\mathfrak{N}''$ von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{U}$. Es ist $\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{U}$ abgeschlossen in $\mathfrak{E}$, also wieder kompakt. Das Netz $\mathfrak{N}''$ enthält daher ein konvergentes Unternetz, das gleichzeitig Unternetz von $\mathfrak{N}$ ist und gegen M_0 konvergieren muß. Dies ergibt aber einen Widerspruch, da $\mathfrak{N}''$ in $\mathfrak{E} \setminus \mathfrak{U}$ liegt, also kein Unternetz gegen M_0 konvergieren kann. Es konvergiert also $\mathfrak{N}$ selbst und damit auch jedes Unternetz, insbesondere das Netz $\mathfrak{N}'$, gegen M_0.

Der eben bewiesene Satz ist sachlich ein Spezialfall von Satz 10; allerdings überzeugt man sich davon erst nachträglich, nachdem man ihn schon direkt bewiesen hat.

Korollar 10. 3. *Ist unter den Voraussetzungen von Korollar* 10.2 $\mathfrak{A} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$, *dann enthält für jeden Index $\lambda \in L$ die Darstellung $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe X_{ϱ_λ} genau so oft wie die triviale Darstellung der Untergruppe X_0.*

Beweis: Es sei $d_\varrho^{(\lambda)}$ die Anzahl der in $D^{(\lambda)}$ enthaltenen trivialen Darstellungen von X_ϱ. Wir nehmen an, für einen festen Index $\lambda \in L$ sei $d_0^{(\lambda)} < d = \min\{d_\varrho^{(\lambda)} : \varrho \in R\}$. Da für $d_\varrho^{(\lambda)}$ höchstens $s_\lambda + 1$ Werte zur Verfügung stehen, existiert eine Untergruppe $X_{\bar\varrho}$ $(\bar\varrho \in R)$ derart, daß $d_{\bar\varrho}^{(\lambda)} = d$ ist. Wir denken uns $D^{(\lambda)}$ so transformiert, daß bei Beschränkung von $D^{(\lambda)}$ auf $X_{\bar\varrho}$ die d trivialen Darstellungen von $X_{\bar\varrho}$ die ersten d Stellen der Hauptdiagonale einnehmen. Der zu $D^{(\lambda)}$ gehörige Darstellungsmodul $\mathfrak{R}^{(\lambda)}$ enthält also einen maximalen d-dimensionalen Unterraum $\mathfrak{R}_{\bar\varrho}^{(\lambda)}$, der bei den den Elementen von $X_{\bar\varrho}$ entsprechenden Transformationen punktweise fest bleibt. Der Unterraum $\mathfrak{R}_{\bar\varrho}^{(\lambda)}$ wird gerade von den ersten d Basisvektoren aufgespannt. Ist $\varrho > \bar\varrho$, also $X_\varrho > X_{\bar\varrho}$, so muß der maximale d-dimensionale Unterraum $\mathfrak{R}_\varrho^{(\lambda)} < \mathfrak{R}^{(\lambda)}$, der bei den den Elementen von X_ϱ entsprechenden Transformationen punktweise fest bleibt, auch bei den den Elementen von $X_{\bar\varrho}$ entsprechenden Transformationen punktweise fest bleiben. Es folgt $\mathfrak{R}_\varrho^{(\lambda)} < \mathfrak{R}_{\bar\varrho}^{(\lambda)}$ und wegen der Gleichheit der Dimensionen $\mathfrak{R}_\varrho^{(\lambda)} = \mathfrak{R}_{\bar\varrho}^{(\lambda)}$. Es läßt also jede die Untergruppe $X_{\bar\varrho}$ enthaltende Untergruppe X_ϱ die ersten d Basisvektoren invariant, und $D^{(\lambda)}$ enthält an den ersten d Stellen der Hauptdiagonale die triviale Darstellung jeder Untergruppe X_ϱ $(\varrho \in R)$. Dann ist $M_0(D^{(\lambda)})$ eine Matrix vom Rang $d_0^{(\lambda)}$, die Matrix $\lim_{\mathfrak{N}} M_\varrho(D^{(\lambda)})$ aber eine Matrix vom Rang $d > d_0^{(\lambda)}$, im Widerspruch zu Korollar 10. 2.

Korollar 10. 4. *Es sei $\mathfrak{A} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$ und $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ein System von Untergruppen von X, das unter Einschließung vollständig geordnet ist. Ferner*

sei $\mathfrak{N} = \{M_\varrho : \varrho \in R\}$ das Netz der Funktionale M_ϱ in der vollständigen Ordnung von R. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a) $\left(\bigcup_{\varrho \in R} X_\varrho\right)^{\sim} = X.$

b) $\lim_{\mathfrak{N}} M_\varrho = M\,(\mathfrak{A}).$

c) *$M_\varrho(f) > 0$ für jede Umgebungsfunktion $f \in \mathfrak{A}$ und mindestens einen von f abhängigen Index $\varrho \in R$.*

d) *Für jeden Index $\lambda \in L \setminus \{1\}$ enthält die Darstellung $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe X_{ϱ_λ} nicht.*

Beweis: Aus a) folgt b) nach Korollar 10. 2. Aus b) folgt c) trivialerweise. Aus c) folgt a) wie im Beweis von Korollar 5. 1. Aus a) folgt d) nach Korollar 10. 3. Aus d) folgt b) wie im Beweis von Satz 8.

Satz 11. *Es sei $\mathfrak{A} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ ein voller Modul in $\mathfrak{F}$ und $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ein wohlgeordnetes System von Untergruppen von X. Es werde X derart $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-erzeugt von $\bigcup_{\varrho \in R} X_\varrho$, daß für jeden Index $\varrho \in R$ die Menge*

$$N_\varrho = \bigcup_{\varrho_n < \varrho} \left(\bigcup_{\varrho_1 < \cdots < \varrho_n} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n} \right) \tag{35}$$

ein Normalteiler von X ist. Dann enthält für jeden Index $\lambda \in L \setminus \{1\}$ die Darstellung $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe X_{ϱ_λ} nicht.

Beweis: (35) ist so zu verstehen, daß wir die Wohlordnung des Systems $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ auf R übertragen und die Vereinigungsmenge über alle endlichen geordneten Indexmengen $\varrho_1 < \cdots < \varrho_n$ bilden, deren letztes Glied ϱ_n kleiner als ϱ ist. Ähnlich wie im Beweis von Satz 6 können wir durch transfinite Induktion nach ϱ zunächst zeigen, daß sich jedes endliche Produkt von Elementen der Untergruppen X_σ $(\sigma < \varrho,\ \sigma \in R)$ in der Form $x_{\varrho_1} \cdots x_{\varrho_n}$ mit $x_{\varrho_i} \in X_{\varrho_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\varrho_1 < \cdots < \varrho_n < \varrho$ schreiben läßt. Da X von $\bigcup_{\varrho \in R} X_\varrho$ $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$-erzeugt wird, gilt bereits

$$\left(\bigcup_{\varrho_1 < \cdots < \varrho_n} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n} \right)^{\sim} = X. \tag{36}$$

Wir nehmen nun an, die Darstellung $D^{(\lambda)}$ enthalte für einen festen Index $\lambda \in L$ die triviale Darstellung jeder Untergruppe X_ϱ $(\varrho \in R)$. Durch transfinite Induktion nach ϱ zeigen wir, daß $D^{(\lambda)}(y)$ für $y \in N_\varrho X_\varrho$ die Einheitsmatrix ist. Dies ist nach Hilfssatz 4 richtig für $\varrho = 1$, wenn wir $N_1 = \{e\}$ setzen, da nach Voraussetzung $X_1 = N_2$ Normalteiler von X ist. Setzen wir die Richtigkeit der Behauptung für alle Indizes $\sigma < \varrho$, $\sigma \in R$ voraus. Es sei $y \in N_\varrho X_\varrho$, etwa $y = x_\sigma x_\varrho$ mit

$$x_\sigma = x_{\sigma_1} \cdots x_{\sigma_m} \in N_{\sigma_m} X_{\sigma_m} \subset N_\varrho (\sigma_1 < \cdots < \sigma_m < \varrho),$$

und $x_\varrho \in X_\varrho$. Wir denken uns $D^{(\lambda)}$ so transformiert, daß die Beschränkung von $D^{(\lambda)}$ auf X_ϱ vollständig reduziert erscheint. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung $D^{(\lambda)}(y) = D^{(\lambda)}(x_\varrho)$. Es enthält also $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung von $N_\varrho X_\varrho$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) Es existiert der Index $\varrho + 1 \in R$. Dann ist $N_\varrho X_\varrho = N_{\varrho+1}$ Normalteiler von X und nach Hilfssatz 4 ist $D^{(\lambda)}(y)$ die Einheitsmatrix.

b) Es existiert kein Index $\varrho + 1$ in R. Dann gilt nach (36) $(N_\varrho X_\varrho)^{\sim} = X$, und $D^{(\lambda)}$ enthält zufolge der Stetigkeit von $D^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung von X. Also ist $\lambda = 1$ und $D^{(\lambda)}(y)$ die Einheitsmatrix. Die transfinite Induktion ist damit durchgeführt.

Wir zeigen nun, daß unter der gemachten Voraussetzung $\lambda = 1$ gelten muß. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle.

a) Die wohlgeordnete Indexmenge R enthalte kein größtes Element. Dann gilt nach (36) $\left(\bigcup_{\varrho \in R} N_\varrho\right)^{\sim} = X$, und jedes Element von X muß infolge der Stetigkeit von $D^{(\lambda)}$ in der Darstellung $D^{(\lambda)}$ durch die Einheitsmatrix dargestellt werden. Also ist $\lambda = 1$.

b) Die Indexmenge R enthalte ein größtes Element ϱ. Wie oben erhalten wir $(N_\varrho X_\varrho)^{\sim} = X$ und $\lambda = 1$.

Wir haben damit gezeigt, daß eine nichttriviale Darstellung $D^{(\lambda)}$ nicht die triviale Darstellung jeder Untergruppe $X_\varrho\,(\varrho \in R)$ enthalten kann.

Die Voraussetzungen von Satz 11 sind insbesondere erfüllt, wenn alle Untergruppen $X_\varrho\,(\varrho \in R)$ (möglicherweise mit einer Ausnahme, die dann als größtes Element in der Wohlordnung des Systems $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ zu wählen ist) Normalteiler von X sind, da wir das System $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit als wohlgeordnet annehmen können. Die folgenden Korollare ergeben sich wie in § 3.

Korollar 11. 1. *Es sei* $\mathfrak{A} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ *ein voller Modul in* $\mathfrak{F}$ *und* $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ *ein System von Untergruppen der Abelschen Gruppe* X. *Ferner sei* $\mathfrak{N} = \{M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$ *ein Netz von Funktionalen* $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Jede Darstellung* $D^{(\lambda)}(\lambda \in L \setminus \{1\})$ *enthält die triviale Darstellung mindestens einer Untergruppe* X_{ϱ_λ} *nicht.*

b) $\lim_{\mathfrak{N}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = M\,(\mathfrak{A})$.

c) $\left(\bigcup_{\mathfrak{N}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\right) = X$.

d) X *wird* $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$*-erzeugt durch* $\bigcup_{\varrho \in R} X_\varrho$.

Korollar 11. 2. *Es sei* $\mathfrak{A} = \sum_{\lambda \in L} \mathfrak{D}^{(\lambda)}$ *ein voller Modul in* $\mathfrak{F}$, *sowie* $\{X_\varrho : \varrho \in R\}$ *ein System von Untergruppen und* X_0 *eine weitere Untergruppe der Abelschen Gruppe* X. *Ferner sei* $\mathfrak{N} = \{M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} : (\varrho_i) \in (R)\}$ *ein Netz von Funktionalen* $M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n}$. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Im Modul* $\{D^{(\lambda)} : \lambda \in L\}$ *sind genau jene Darstellungen trivial auf* X_0, *die auf sämtlichen Untergruppen* $X_\varrho(\varrho \in R)$ *trivial sind.*

b) $\lim_{\mathfrak{N}} M_{\varrho_1,\ldots,\varrho_n} = M_0\,(\mathfrak{A})$.

c) $\left(\bigcup_{\mathfrak{N}} X_{\varrho_1} \cdots X_{\varrho_n}\right)^{\sim} = X_0^{\sim}$.

d) $X_0^{\sim}$ *wird* $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$*-erzeugt durch* $\bigcup_{\varrho \in R} X_\varrho$.

Da jede Abelsche Gruppe durch die Gesamtheit ihrer zyklischen Untergruppen (schlechthin) erzeugt wird, können wir Korollar 11. 1 verwenden, um den Mittelwert einer fp. Funktion auf einer gegebenen Abelschen Gruppe als Grenzwert eines Netzes von einfacheren Mittelwerten zu konstruieren. Wir werden darauf in § 6 zurückkommen und führen hier nur einen Spezialfall als Beispiel an.

Es sei X das direkte Produkt einer abzählbar unendlichen Menge $\{X_i : i = 1, 2, \ldots\}$ zyklischer Untergruppen der Ordnung 2. Da die Untergruppen kompakt in der diskreten Topologie sind, ist X kompakt in der Produkt-Topologie. Fassen wir X (in bezug auf gliedweise Multiplikation) als Abelsche topologische Gruppe aller Folgen auf, deren Glieder die Werte 1 und -1 annehmen können, dann ist eine Umgebung der Folge

$x = \{x_j : j = 1, 2, \ldots\}$ erklärt als Menge aller solchen Folgen y mit $y_{j_k} = x_{j_k}$ $(k = 1, \ldots, m)$. Die stetigen komplexwertigen Funktionen auf X bilden einen vollen Modul $\mathfrak{A}$ von fp. Funktionen auf X. Die Gruppe X wird erzeugt durch die Gesamtheit der Folgen $\bar{x}_i = \{\bar{x}_{ij}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, die durch $\bar{x}_{ii} = -1$, $\bar{x}_{ij} = 1$ $(i \neq j)$ erklärt sind. Für jede Funktion $f \in \mathfrak{A}$ ist

$$M_{1,\ldots,n}(f) = \frac{1}{2^n} \sum_{1 \leq p_i \leq 2} f(\bar{x}_1^{p_1} \cdots \bar{x}_n^{p_n}),$$

also gilt nach Korollar 11. 1

$$M(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{1 \leq p_i \leq 2} f(\bar{x}_1^{p_1} \cdots \bar{x}_n^{p_n}) \text{ für alle } f \in \mathfrak{A}. \tag{37}$$

Literatur.

[1] *A. H. Clifford*, Representations induced in an invariant subgroup. Ann. of Math. **38** (1937), 533—555.

[2] *G. Helmberg*, Ein Satz über Gleichverteilung in kompakten Gruppen. II. Monatsh. f. Math. **63** (1959), 368—377.

[3] *E. R. van Kampen*, Almost periodic functions and compact groups. Ann. of Math. **37** (1936), 78—91.

[4] *J. L. Kelley*, General topology. New York, 1955.

[5] *L. H. Loomis*, An Introduction to abstract harmonic analysis. New York, 1953.

[6] *W. Maak*, Fastperiodische Funktionen. Berlin, 1950.

[7] *G. Nöbeling* und *H. Bauer*, Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen. Jahresber. d. DMV **58** (1955), 54—72.

Eingegangen 12. Februar 1960.

Anwendungen unendlich kleiner Zahlen.

I. Zur Theorie der Distributionen.

Von *Detlef Laugwitz* in Darmstadt.

1. Einleitung.

In einer früheren Arbeit [4] haben wir die Grundzüge einer Erweiterung der Infinitesimalrechnung angegeben, in welcher unendlich kleine und unendlich große Zahlen wesentlich verwendet werden. Es wurde auch gezeigt, daß die gewohnte Analysis in diesem Aufbau mit enthalten ist. Hier will ich nun damit beginnen, zu zeigen, daß einige neuere Erweiterungen des Funktionsbegriffs (u. a. die Theorie der Distributionen, die Operatorenrechnung von Mikusiński usw.) sich in unseren Aufbau der erweiterten Infinitesimalrechnung einfügen lassen.

Wir werden dabei in folgender Weise vorgehen. Eine Theorie verallgemeinerter Funktionen wird erhalten, indem 1. unter den (echten) Funktionen der erweiterten Analysis gewisse als zulässig ausgezeichnet werden, 2. zwischen diesen „zulässigen" Funktionen eine Äquivalenzrelation definiert wird. Die verallgemeinerten Funktionen der jeweiligen Theorie sind dann die Äquivalenzklassen aus Funktionen der erweiterten Infinitesimalrechnung. Das Verfahren ist im wesentlichen das gleiche, wie in [4] beim Nachweis des Enthaltenseins der gewohnten Analysis: Die Cantor-Dedekindschen reellen Zahlen sind dort als Klassen gewisser Zahlen des erweiterten Bereichs dargestellt worden. Eine Theorie verallgemeinerter Funktionen beginnt dann mit der Untersuchung der algebraischen und analytischen Operationen zwischen diesen Äquivalenzklassen.

Abgesehen von dem begrifflichen Vorteil, den ein Einbau der verschiedensten Theorien in eine einheitliche erweiterte Infinitesimalrechnung bieten dürfte, streben wir noch andere Ziele an. Es ist für viele Anwendungen von Interesse, „verallgemeinerte" Funktionen, etwa Deltafunktionen, verfügbar zu haben, die an jeder Stelle einen bestimmten Wert haben. Dies trifft für unsere Funktionen zu, nicht aber für die Klassen, also z. B. die Distributionen. Auch bei nichtlinearen Operationen, so bei der Multiplikation, ist es oft nicht möglich, mit den Klassen zu rechnen; wir können aber die einzelnen Funktionen einer Klasse genauso behandeln wie Funktionen der üblichen Analysis. Es wird also eine Distribution aufgelöst in die zueinander äquivalenten echten Funktionen, und für viele Zwecke ist die Verwendung einer solchen „Feinstruktur" durchaus nützlich (vgl. [1]).

Wir beginnen mit der Durchführung dieses Programms bei den Distributionen. Dabei könnte man irgendeine der mannigfachen vorliegenden Definitionen von Distributionen zugrunde legen; ich befasse mich hier mit einem Zugang zur Distributionstheorie, welcher für die Anwendungen anscheinend besonders geeignet ist und der auf Mikusiński und Sikorski [3] zurückgeht. Ein Hauptergebnis wird der Satz sein, daß sich alle Distributionen durch Polynome (eventuell unendlich hohen Grades) mit Koeffi-

zienten aus dem Ring der Ω-Zahlen darstellen lassen. Nach diesem Satz gestaltet sich der Aufbau der Distributionstheorie dann besonders einfach.

In den ersten Abschnitten gebe ich eine Einführung in die in [4] entwickelte erweiterte Analysis, teils zur Bequemlichkeit des Lesers, teils auch wegen einer in [4] nicht ausgeführten Komplettierung der Ω-Zahlen, die sich für unsere Anwendungen als nützlich erweisen wird. Wir werden hier nämlich nicht wie in [4] von den rationalen, sondern von den reellen Zahlen ausgehen. In der vorliegenden Note wird nur gezeigt werden, wie sich die Distributionen endlicher Ordnung und die algebraischen und analytischen Operationen mit ihnen in die erweiterte Infinitesimalrechnung einordnen. In späteren Noten werden wir auf Distributionen unendlicher Ordnung, auf konvergente Folgen von Distributionen und auf spezielle Anwendungen eingehen.

2. Ω-Zahlen.

Die Ω-Zahlen sind Limites (in einem neuen Sinne) von Folgen reeller Zahlen (r_m); wir schreiben

$$r_\Omega = \operatorname*{Lim}_{m=\Omega} r_m, \quad r_m \text{ reell}, \quad m \text{ natürliche Zahl } 1, 2, 3, \ldots ^{1)}.$$

Ist $s_\Omega = \operatorname*{Lim}_{m=\Omega} s_m$, so wird definiert:

(1) $\quad r_\Omega = s_\Omega$ für $r_m = s_m$ von einem Index $m = m_0$ ab,

(2) $\quad r_\Omega > s_\Omega$ für $r_m > s_m$ von einem Index $m = m_0$ ab,

(3) $\quad t_\Omega = r_\Omega + s_\Omega$, wenn $t_m = r_m + s_m$ ist,

und ebenso für die anderen rationalen Rechenoperationen, die jeweils für die „Komponenten" r_m, s_m von einem Index $m = m_0$ an erfüllt sein müssen.

Die Ω-Zahlen, in dieser Weise als Klassen von Folgen reeller Zahlen eingeführt, bilden einen teilweise geordneten Quotientenring. Die Nullteiler dieses Ringes sind die Limites von solchen Folgen r_m, in denen immer wieder Nullen auftreten.

Die reellen Zahlen selbst werden durch die konstanten Folgen isomorph und ordnungstreu eingebettet. Es wird weiter definiert:

(4) $$|r_\Omega| = \operatorname*{Lim}_{m=\Omega} |r_m|.$$

Die Ω-Zahl g_Ω heißt ganz, wenn die „Komponenten" g_m ganz sind. Wir schreiben:

(5) $$r_\Omega \gg s_\Omega,$$

wenn $r_\Omega > 0$, $s_\Omega > 0$ und $r_\Omega > n s_\Omega$ für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt, und sagen dann, daß r_Ω unendlich groß ist gegen s_Ω (s_Ω unendlich klein gegen r_Ω); unendlich groß heißt eine Ω-Zahl r_Ω mit $r_\Omega \gg 1$, unendlich klein eine Ω-Zahl s_Ω mit $|s_\Omega| \ll 1$. Mit

$$\Omega \underset{\text{def}}{=} \operatorname*{Lim}_{m=\Omega} m,$$

$$\omega \underset{\text{def}}{=} \operatorname*{Lim}_{m=\Omega} \frac{1}{m} = \frac{1}{\Omega},$$

$$\Omega^\Omega \underset{\text{def}}{=} \operatorname*{Lim}_{m=\Omega} m^m$$

etc. gilt

$$\Omega^\Omega \gg \Omega^3 \gg \Omega^2 \gg \Omega \gg 1 \gg \omega \gg \omega^2 \gg \omega^3 \gg \omega^\Omega.$$

Es gibt also unendlich große und unendlich kleine Zahlen verschiedener Stufen.

---

[1]) Für Einzelheiten sei auf [4] verwiesen. Die hier verwendete Gleichheit und die Relation $>$ sind dort $\doteq$ und $\dot{>}$ geschrieben.

Von besonderer Bedeutung sind unendliche Summen und Produkte. Es sei für jedes ganzrationale k eine Ω-Zahl $q_k = \operatorname*{Lim}_{m=\Omega} q_{km}$ gegeben; dann definiert man für ganze Ω-Zahlen $g_\Omega < h_\Omega$:

$$\sum_{k=g_\Omega}^{h_\Omega} q_{k\Omega} = \operatorname*{Lim}_{m=\Omega} \sum_{k=g_m}^{h_m} q_{km}$$

und ebenso für das Produktzeichen Π statt des Summenzeichens Σ.

3. Normale Funktionen.

Von den Funktionen mit Definitions- und Wertebereichen aus Ω-Zahlen werden wir hier nur solche einer speziellen Klasse benötigen, die *normalen Funktionen*. Eine Funktion $f(x) = f_\Omega(x_\Omega)$ heißt normal, wenn es für $n = 1, 2, 3, \ldots$ reellwertige Funktionen $f_n(x)$ derart gibt (x reell), daß

$$f(x) = f_\Omega(x_\Omega) = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} f_n(x_n) \quad \text{für} \quad x = x_\Omega = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} x_n$$

ist.

Beispiele für normale Funktionen sind die rationalen Funktionen mit Koeffizienten, welche Ω-Zahlen sind, z. B.

$$f(x) = \frac{1 + \Omega x}{\omega x^2}$$

$$\text{mit} \quad f_n(x_n) = \frac{1 + n x_n}{\frac{x_n^2}{n}}.$$

Man kann sagen, daß bei einer normalen Funktion die n-te Komponente $f_n(x_n)$ nur von n und der n-ten Komponente x_n des Argumentes x_Ω abhängt.

Ist $f(x)$ eine reelle Funktion, d. h. für reelle x reellwertig, so kann man diese Funktion eindeutig erweitern auf alle x_Ω, deren Komponenten x_n zum Definitionsbereich von f gehören:

$$f(x_\Omega) \underset{\text{def}}{=} \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} f(x_n) \quad \text{für} \quad x_\Omega = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} x_n.$$

Diese erweiterte Funktion, die mit demselben Funktionssymbol bezeichnet werden kann, nennen wir die stetige Fortsetzung der reellen Funktion f. Man zeigt, daß $f(x_\Omega)$ stetig ist, wenn die ursprüngliche reelle Funktion im gewöhnlichen Sinne stetig ist ([4], S. 20; [2], S. 45). Die stetige Fortsetzung einer reellen Funktion ist offenbar eine normale Funktion, und zwar sind alle f_n gleich f. Auf diese Weise ist der Bestand an reellen Funktionen in die erweiterte Infinitesimalrechnung übernommen.

Für normale Funktionen lassen sich die wichtigsten Sätze der Analysis beweisen, indem man die entsprechenden Sätze der gewohnten Analysis für die Komponentenfunktionen $f_n(x)$ heranzieht. Man wird dazu allerdings benötigen, daß diese Übertragung in eindeutiger Weise möglich ist. Dazu dient das folgende

Lemma. *Gibt es zwei Folgen reeller Funktionen $f_n(x)$ und $g_n(x)$ derart, daß*

$$f_\Omega(x_\Omega) = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} f_n(x_n) = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} g_n(x_n)$$

für alle $x_\Omega = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} x_n$ eines nicht leeren Definitionsbereichs gilt[2]*, so ist*

$$f_n(x) \equiv g_n(x) \text{ für } n \geqq n_0.$$

Beweis. Zunächst ist nach der Erklärung der Gleichheit zweier Ω-Zahlen

$$f_n(x_n) = g_n(x_n) \text{ für } n \geqq n_0(x_\Omega).$$

Wir müssen zeigen, daß die natürliche Zahl n_0 sich tatsächlich unabhängig von x_Ω wählen läßt. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine monoton wachsende Folge n_k von natürlichen Zahlen und Ω-Zahlen $x_{\Omega n_k}$ derart, daß

$$f_{n_k}(x_{n_k n_k}) \neq g_{n_k}(x_{n_k n_k})$$

wäre. Wählt man nun $\bar{x}_\Omega$ so, daß $\bar{x}_{n_k} = x_{n_k n_k}$ ist, so hat man $f_\Omega(\bar{x}_\Omega) \neq g_\Omega(\bar{x}_\Omega)$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Dieses Lemma zeigt, daß die Komponentenfolge f_n einer normalen Funktion im wesentlichen, d. h. bis auf endlich viele Anfangsglieder, eindeutig bestimmt ist. Daher sind die nachfolgenden Überlegungen unabhängig von der speziellen Art der Darstellung einer normalen Funktion als Limes für $n = \Omega$ einer Folge von reellen Funktionen f_n (man vergleiche auch [4], Kapitel II und [2], S. 47—48).

Stetigkeit: Eine normale Funktion $f(x) = f_\Omega(x_\Omega)$ ist in $\mathring{x} = \mathring{x}_\Omega$ stetig, wenn jedes f_n für $x = \mathring{x}_n$ im gewöhnlichen Sinne stetig ist und $\mathring{x} = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} \mathring{x}_n$ gilt.

Differentiation: $f(x)$ hat in $x = \mathring{x}_\Omega$ die Ableitung $f'(\mathring{x}_\Omega)$, wenn alle f_n für $x = \mathring{x}_n$ differenzierbar sind und

$$f'_\Omega(\mathring{x}_\Omega) = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} f'_n(\mathring{x}_n)$$

ist. Die Ableitung einer normalen Funktion ist selbst eine normale Funktion.

Integration: $f(x)$ ist im Intervall $a_\Omega \leqq x_\Omega \leqq b_\Omega$ integrierbar, wenn alle f_n in den Intervallen $a_n \leqq x \leqq b_n$ im gewöhnlichen Sinne (nach Riemann, Lebesgue usw.) integrierbar sind, und es ist

$$\int_{a_\Omega}^{b_\Omega} f_\Omega(x)\,dx = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\,dx.$$

Das unbestimmte Integral einer normalen Funktion ist wieder eine normale Funktion.

Es ist leicht zu sehen, daß sich die Sätze der reellen Analysis auf normale Funktionen übertragen lassen, indem man jeweils den entsprechenden Satz auf die Komponentenfunktionen f_n anwendet. Auch dafür sei wieder auf die Arbeiten [4] und [2] verwiesen.

4. Polynome unendlichen Grades.

Eine besonders wichtige Klasse von normalen Funktionen, die Ω-Polynome, erhält man, wenn alle Komponentenfunktionen f_n reelle Polynome sind:

$$f_n(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{N_n} a_{kn} x^k.$$

Wir schreiben dann

$$P_\Omega(x_\Omega) = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} P_n(x_n) = \sum_{k=0}^{N_\Omega} a_{k\Omega} x^k.$$

Die nichtnegative ganze Ω-Zahl N_Ω heiße der Grad des Ω-Polynoms $P_\Omega(x)$, die Ω-Zahlen $a_{k\Omega} = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} a_{kn}$ heißen seine Koeffizienten.

Ein Polynom unendlichen Grades mit reellen Koeffizienten ist z. B.

$$\sum_{k=0}^{\Omega} \frac{x^k}{k!};$$

---

[2]) Genauer wird vom Definitionsbereich vorausgesetzt: Der Definitionsbereich jedes einzelnen f_n ist nicht leer, und gehören die x_n zu den Definitionsbereichen der entsprechenden f_n, so gehört $x_\Omega = \operatorname*{Lim}_{n=\Omega} x_n$ zum Definitionsbereich von f_Ω.

in

$$(1 + x\omega)^{\Omega} = \sum_{k=0}^{\Omega} \binom{\Omega}{k} \omega^k x^k$$

sind auch die Koeffizienten Ω-Zahlen: $\binom{\Omega}{k} = \lim\limits_{n=\Omega} \binom{n}{k}$.

Polynome sind offenbar beliebig oft differenzierbar und integrierbar, und diese Operationen führen nicht aus dem Bereich der Ω-Polynome hinaus.

Es gilt als einfache Folgerung aus dem Weierstraßschen Approximationssatz:

Ist $f_\Omega(x_\Omega)$ eine in $a_\Omega \leqq x_\Omega \leqq b_\Omega$ stetige normale Funktion, so existiert zu jedem positiven ε_Ω (das auch beliebig unendlich klein sein darf) ein Ω-Polynom $P_\Omega(x_\Omega)$, so daß

$$|f_\Omega(x_\Omega) - P_\Omega(x_\Omega)| < \varepsilon_\Omega \text{ für } a_\Omega \leqq x_\Omega \leqq b_\Omega \text{ ist.}$$

Der *Beweis* ergibt sich so: Man bestimme nach dem Weierstraßschen Approximationssatz ein reelles Polynom $P_n(x)$, so daß

$$|f_n(x_n) - P_n(x_n)| < \varepsilon_n \text{ für } a_n \leqq x_n \leqq b_n \quad (n \geqq n_0)$$

gilt. Dann leistet

$$P_\Omega(x_\Omega) = \lim_{n=\Omega} P_n(x_n)$$

das Gewünschte ([4], S. 23).

Die Ω-Polynome approximieren also stetige Funktionen bis auf beliebig unendlich kleine Fehler; wie wir sehen werden, läßt sich entsprechendes auch für unstetige Funktionen und allgemeiner sogar für Distributionen beweisen.

5. Definition der Distributionen endlicher Ordnung.

Distributionen werden eingeführt als Äquivalenzklassen von normalen Funktionen. Wir sagen, daß die normalen Funktionen f_Ω und g_Ω (die etwa für alle x_Ω definiert seien) äquivalent im Distributionssinne seien, $f_\Omega \underset{D}{\sim} g_\Omega$, wenn es eine nichtnegative ganzrationale Zahl k und normale Funktionen F_Ω, G_Ω gibt, so daß gilt:

(1) $\quad |F_\Omega(x_\Omega) - G_\Omega(x_\Omega)| \ll 1$ für $|x_\Omega|$ endlich oder unendlich klein,

(2) $\quad F_\Omega^{(k)}(x) = f_\Omega(x), \quad G_\Omega^{(k)}(x) = g_\Omega(x).$

Äquivalent im Distributionssinne sind also alle Funktionenpaare, welche sich für endliche und unendlich kleine Argumente höchstens unendlich wenig unterscheiden ($k = 0$), und alle Funktionenpaare, welche durch k-malige Differentiation aus solchen entstehen ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Dabei kann bei festen f, g die Zahl k durch jede größere Zahl ersetzt werden, da

$$\left| \int_0^{x_\Omega} (F_\Omega(x) - G_\Omega(x))\, dx \right| \leqq |x_\Omega| \max |F_\Omega(y) - G_\Omega(y)| \ll 1$$

für endliche und unendlich kleine x gilt, weil das Maximum (für alle y zwischen 0 und x_Ω genommen) wegen der Stetigkeit von F und G angenommen wird und unendlich klein ist.

Die Relation $\underset{D}{\sim}$ ist eine Äquivalenzbeziehung; dabei ist lediglich die Transitivität nicht trivial, aber einfach zu beweisen. Ist

$$f \underset{D}{\sim} g, \quad g \underset{D}{\sim} h,$$

so existieren $F, G, \bar{G}, H$ mit $|F - G| \ll 1$, $|\bar{G} - H| \ll 1$ (für endliche und unendlich kleine Argumente) und $F^{(k)} = f$, $G^{(k)} = g = \bar{G}^{(k')}$, $H^{(k')} = h$; dabei können k und k'

durch die größere von beiden, etwa k, ersetzt werden; sei also $k' = k$. Setzen wir $\bar{H} = G - \bar{G} + H$, so haben wir

$$\bar{H}^{(k)} = h, \quad |F - \bar{H}| \leqq |F - G| + |\bar{G} - H| \ll 1,$$

also $f \underset{D}{\sim} h$.

Die Klasse aller g_Ω, die zu einem festen f_Ω äquivalent sind, heißt Distribution (endlicher Ordnung) $[f_\Omega(x)]$. Die Schreibungen $f_\Omega \underset{D}{\sim} g_\Omega$ und $[f_\Omega(x)] = [g_\Omega(x)]$ sind also gleichbedeutend.

Die Distribution heißt *fundamental*, falls eine stetige reelle Funktion $F(x)$ existiert, so daß

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad F_\Omega^{(k)}(x_\Omega) = f_\Omega(x_\Omega) \\ &\text{(b)} \quad |F_\Omega(x_\Omega) - F(x_\Omega)| \ll 1 \end{aligned}$$

für endliche und unendlich kleine x_Ω gilt.

(Dabei ist $F(x_\Omega)$ die stetige Fortsetzung von $F(x)$.)

Ich vergleiche diese Definition mit der von Mikusiński und Sikorski [3] gegebenen. Diese Autoren betrachten allerdings nur solche Distributionen, die unseren „fundamentalen" entsprechen und formulieren alle Aussagen für Funktionenfolgen; im übrigen aber stimmen die Definitionen in [3] mit unseren wörtlich überein, sobald man die Bedingungen (1), (2), (3) für die Komponentenfunktionen F_n, f_n usw. formuliert. In der Tat bedeutet etwa die Bedingung (3b), daß für reelle a, b in $a \leqq x_\Omega \leqq b$

$$\max_{a \leqq x_\Omega \leqq b} |F_\Omega(x_\Omega) - F(x_\Omega)| \leqq \varepsilon_\Omega \ll 1,$$

also für $n \geqq n_0$, $a \leqq x \leqq b$

$$|F_n(x) - F(x)| \leqq \varepsilon_n$$

ist, wobei die ε_n im gewohnten Sinne eine Nullfolge bilden; F_n geht also gleichmäßig in jedem endlichen Teilintervall gegen F. Ähnlich ergeben sich die anderen Definitionen aus [3].

Wir zeigen nun:

Jede Distribution (endlicher Ordnung) läßt sich durch ein Ω-Polynom darstellen, d. h. sie läßt sich als $[p_\Omega(x)]$ schreiben, wobei $p_\Omega(x)$ ein Ω-Polynom ist.

Ist die Distribution $[f_\Omega]$ gegeben, so gibt es eine normale Funktion $F_\Omega(x)$ mit $F_\Omega^{(k)}(x) = f_\Omega(x)$, und es existiert nach dem Approximationssatz aus 4. ein Ω-Polynom $P_\Omega(x)$ mit $|F_\Omega(x) - P_\Omega(x)| \leqq \omega$ in $-\Omega \leqq x_\Omega \leqq +\Omega$, also insbesondere für endliche und unendlich kleine x_Ω. Für das Ω-Polynom $p_\Omega(x) = P_\Omega^{(k)}(x)$ gilt also $p_\Omega(x) \underset{D}{\sim} f_\Omega(x)$, w. z. b. w.

Sind $f(x)$, $g(x)$ stetige reelle Funktionen und gilt $f(x) \neq g(x)$ für wenigstens ein reelles x, so hat man für die zugehörigen Distributionen $[f(x)] \neq [g(x)]$, da iterierte Integrale beider Funktionen stets endliche Unterschiede haben.

6. Die δ-Distribution.

Das erste Beispiel einer Distribution, die keine reelle Funktion ist, ist die von Dirac zuerst ausgiebig verwendete „δ-Funktion". In [2] habe ich definiert: Eine stetige normale Funktion $\delta_\Omega(x_\Omega)$ heißt δ-artig, wenn es eine positive unendlich kleine Zahl β gibt, so daß

$$\text{(I)} \quad \left| \int_{a_\Omega}^{b_\Omega} \delta_\Omega(x)\, dx \right| \ll 1 \text{ für alle } a_\Omega, b_\Omega \text{ mit } a_\Omega < b_\Omega \leqq -\beta \text{ oder } \beta \leqq a_\Omega < b_\Omega,$$

$$\text{(II)} \quad \left| \int_{-\beta}^{+\beta} \delta_\Omega(x)\, dx - 1 \right| \ll 1$$

ist. Daraus folgt für $\eta_\Omega(x) \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{x} \delta_\Omega(y)\,dy$, daß

$$|\eta_\Omega(x)| \ll 1 \quad \text{für } x_\Omega \leqq -\beta,$$
$$|\eta_\Omega(x)| = 1 + \varepsilon_\Omega(x_\Omega) \text{ mit } |\varepsilon_\Omega(x_\Omega)| \ll 1 \text{ für } x_\Omega \geqq \beta$$

gilt und $\eta_\Omega(x)$ stetig differenzierbar ist. Falls nun

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \int_{-\beta}^{\beta} |\eta_\Omega(x)|\,dx \ll 1$$

ist, so hat man für

$$F_\Omega(x_\Omega) \underset{\text{def}}{=} \int_0^{x_\Omega} \eta_\Omega(y)\,dy$$

bei $x_\Omega \leqq -\beta$:

$$|F_\Omega(x_\Omega)| \leqq \int_0^{-\beta} |\eta_\Omega(x)|\,dx + \left| \int_{-\beta}^{x_\Omega} \eta_\Omega(x)\,dx \right| \ll 1,$$

bei $x_\Omega \geqq +\beta$:

$$\begin{aligned} F_\Omega(x_\Omega) &= \int_0^{\beta} \eta_\Omega(x)\,dx + \int_{\beta}^{x_\Omega} \eta_\Omega(x)\,dx \\ &= \int_0^{\beta} \eta_\Omega(x)\,dx + x_\Omega - \beta + \int_{\beta}^{x_\Omega} \varepsilon_\Omega(x)\,dx \\ &= x_\Omega + \sigma_\Omega(x_\Omega) \text{ mit } |\sigma_\Omega(x_\Omega)| \ll 1. \end{aligned}$$

Schließlich folgt bei $|x_\Omega| < \beta$ aus II′ unmittelbar $|F_\Omega(x_\Omega)| \ll 1$.

Bezeichnen wir mit $F(x)$ die stetige reelle Funktion, die für negative reelle x gleich 0, für positive reelle x gleich x ist, so haben wir offenbar

$$|F_\Omega(x_\Omega) - F(x_\Omega)| \ll 1,$$

also: Alle δ-artigen Funktionen mit (I), (II), (II′) gehören ein und derselben fundamentalen Distribution an, da sie zweite Ableitungen von Funktionen sind, welche unendlich wenig von $F(x)$ verschieden sind. Diese Distribution heißt die δ-Distribution.

Die Bedingung (II′) bedeutet übrigens keine wesentliche Einschränkung; sie ist z. B. immer erfüllt, wenn $\delta_\Omega(x)$ im Intervall $-\beta \leqq x_\Omega \leqq +\beta$ nirgends negativ ist.

Beispiele für Darstellungen der δ-Distribution durch normale Funktionen sind wohlbekannt; einige findet man in [2].

7. Operationen mit Distributionen.

Aus den Definitionen folgt mühelos: Wenn $[f] = [\bar{f}]$, $[g] = [\bar{g}]$ ist, so ist

$$[f + g] = [\bar{f} + \bar{g}] \; (\underset{\text{def}}{=} [f] + [g])$$

und für endliches oder unendlich kleines λ:

$$[\lambda f] = [\lambda \bar{f}] \; (\underset{\text{def}}{=} \lambda \cdot [f]).$$

Damit ist die Addition von Distributionen und die Multiplikation mit Zahlfaktoren λ erklärt; fundamentale Distributionen gehen dabei übrigens in ebensolche über, falls λ endlich ist. Die Distributionen endlicher Ordnung bilden einen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen, die fundamentalen Distributionen erfüllen einen (echten) Unterraum.

Eine eindeutige Multiplikation von Distributionen ist bekanntlich nicht möglich: Sind δ, $\bar{\delta}$ zwei δ-artige Funktionen, so gilt $\delta(x) \cdot \bar{\delta}(x) = m_\Omega \bar{\bar{\delta}}(x)$, wo $\bar{\bar{\delta}}(x)$ wieder eine δ-artige Funktion ist, und wo m_Ω jede beliebige Ω-Zahl sein kann. (Für einen Beweis vgl. [2], S. 52.)

Doch kann man eine Distribution mit einer unendlich oft differenzierbaren reellen Funktion $\psi(x)$ multiplizieren. Wir müssen dazu zeigen: Ist $[f] = [g]$, so ist auch $[\psi f] = [\psi g]$. Sei also $f = F^{(k)}$, $g = G^{(k)}$ und $|F_\Omega(x) - G_\Omega(x)| \ll 1$ für endliche und unendlich kleine x. Für $k = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei zunächst $k = 1$. Dann ist für $[\psi f] = [\psi g]$ hinreichend

$$R = \left| \psi F - \psi G - \int_0^x (\psi' F - \psi' G)\, dx \right| \ll 1$$

für endliche und unendlich kleine x. Nun ist aber

$$R \leqq |\psi|\,|F - G| + \int_0^x |\psi'|\,|F - G|\, dx.$$

Da $|F - G|$ unendlich klein, ψ, ψ' und x endlich sind, folgt daraus tatsächlich $R \ll 1$. — Für $k > 1$ folgt die Behauptung durch Iteration des Verfahrens.

Mit $[f]$ ist $[\psi f]$ eine fundamentale Distribution.

Insbesondere folgt $[\psi(x)\,\delta(x)] = \psi(0)\,[\delta(x)]$; denn es ist für jede δ-artige Funktion

$$\left| \int_{-\infty}^x \psi(x)\,\delta(x)\, dx - \psi(0) \int_{-\infty}^x \delta(x)\, dx \right| \ll 1$$

(vgl. [2]).

Aus der nach den Definitionen selbstverständlichen Bemerkung, daß für die k-te Ableitung $[f^{(k)}] = [p^{(k)}]$ gilt, wenn $[f] = [p]$ ist, und der Tatsache, daß jede Distribution durch ein Polynom $p_\Omega(x)$ dargestellt werden kann, folgt:

Jede Distribution ist beliebig oft differenzierbar, wobei

$$[p_\Omega(x)]^{(k)} \underset{\text{def}}{=} [p_\Omega^{(k)}(x)]$$

ist.

Die Grundregeln der Differentialrechnung übertragen sich von den Polynomen auf die Distributionen.

Ist $[f_\Omega]' = 0$, so folgt $[f_\Omega] = [c]$, wo c eine konstante Funktion ist. Denn $[f]' = 0$ bedeutet $f = F^{(k)}$, $0 = P^{(k+1)}$, $|F - P| \ll 1$; P ist also ein Polynom vom Grade $\leqq k$, und da $[f] = [F^{(k)}] = [P^{(k)}]$ ist, folgt die Behauptung.

Daraus ergibt sich nun auch die Integration von Distributionen. $[\varphi(x)]$ heißt ein unbestimmtes Integral von $[f(x)]$, wenn $[\varphi(x)]' = [f(x)]$ gilt. Die Existenz eines unbestimmten Integrals folgt für $f(x) = p(x)$, also für ein Ω-Polynom: Man setze $\varphi(x) = \int_a^x p(x)\, dx$. Ist $\psi(x)$ ein weiteres unbestimmtes Integral von $f(x)$, so hat man $[\psi(x)]' - [\varphi(x)]' = 0$, also nach dem soeben Bewiesenen $[\psi(x)] = [\varphi(x)] + c$. Je zwei unbestimmte Integrale einer Distribution unterscheiden sich höchstens um eine Konstante. Damit ist das bestimmte Integral

$$\int_a^x [f(y)]\, dy = [\varphi(x) - \varphi(a)]$$

eindeutig erklärt; es existiert für jede Distribution.

Literatur.

[1] *F. Bopp*, Lorentzinvariante Wellengleichungen für Mehrbahnsysteme. Sitzungsb. Bayer. Akad. Wiss., Math.-nat. Kl. 1958, 167—225.

[2] *D. Laugwitz*, Eine Einführung der δ-Funktionen. Sitzungsb. Bayer. Akad. Wiss., Math.-nat. Kl. 1959, 41—59.

[3] *J. Mikusiński* und *R. Sikorski*, The elementary theory of distributions (I). Rozprawy matematyczne XII, Warschau 1957.

[4] *C. Schmieden* und *D. Laugwitz*, Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. Math. Z. **69** (1958), 1—39.

Eingegangen am 2. April 1960.

Some groups of Transformations defined by Jordan Algebras. III.

Groups of Type E_{6I}.

To Richard Brauer on his sixtieth birthday.

By *N. Jacobson* at New Haven (U.S.A.)[1].

In I of this series of papers we introduced the notion of the generic minimum polynomial and generic norm and trace for finite dimensional strictly power associative algebras. We determined these functions for any central simple Jordan algebra $\mathfrak{J}$ and we introduced the groups $L(\mathfrak{J})$ (the norm preserving or n. p. group of $\mathfrak{J}$) as the group of $1-1$ linear transformations η of $\mathfrak{J}$ onto $\mathfrak{J}$ such that $N(a^\eta) = N(a)$, a in $\mathfrak{J}$, N the generic norm in $\mathfrak{J}$. Under a small restriction on the base field we showed that the group of automorphisms $G(\mathfrak{J})$ is the subgroup of $L(\mathfrak{J})$ characterized by the condition $1^\eta = 1$. This result together with known theorems on automorphisms enabled us to determine the group $L(\mathfrak{J})$ for $\mathfrak{J}$ central simple and special. In II of the present series we investigated the structure of the group of automorphisms of any reduced exceptional simple Jordan algebra $\mathfrak{J}$. The present paper is devoted to a similar study of the group $L(\mathfrak{J})$ for $\mathfrak{J}$ a reduced exceptional Jordan algebra over any field of characteristic $\neq 2, 3$. We shall refer to these groups as groups of *type* E_{6I} since for an algebraically closed base field of characteristic 0 the group $L(\mathfrak{J})$ is the Lie group E_6 in the Killing-Cartan classification of simple Lie groups[2].

If the Cayley algebra $\mathfrak{C}$ used to construct the Jordan algebra $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ is split (that is, is not a division algebra) then we call $\mathfrak{J}$ a split exceptional Jordan algebra. The group $L(\mathfrak{J})$ for $\mathfrak{J}$ split is the group E_6 which has been defined by Chevalley ([4]). This result has been proved by Seligman (forthcoming)[3]. We give here a direct proof of the simplicity of the factor group of $L(\mathfrak{J})$ with respect to its center. We prove the same result also for $L(\mathfrak{J})$ for $\mathfrak{J}$ reduced exceptional and non-split. These groups $L(\mathfrak{J})$ appear to play the same role for the Cayley plane as is played by the unimodular group for Desarguesian projective spaces. The version of the Cayley plane which we use is that

[1]) This research was supported by the United States Air Force Office of Scientific Research and Development Command under Contract AF 49 (C 38) 515. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government.

[2]) See [6] of the Bibliography.

[3]) This has been proved under the restriction that the characteristic is zero or exceeds 23. It seems likely that a further refinement of Seligman's method will yield the result for the primes exceeding 5. Seligman's work and the present work were carried out independently and at about the same time. The present work may also be related to some work by Tits which was reported on in a Bourbaki seminar in 1958.

which has been defined for the real case by Jordan ([11]) and by Freudenthal ([5]) and which has been extended to the general case by Springer ([12]). We shall develop here the results on the Cayley plane which are needed to obtain the structure of the groups $L(\mathfrak{J})$. The algebraic formalism can be used to define also certain unitary subgroups (groups of type E_{6II}) of the $L(\mathfrak{J})$. We hope to consider these in another paper.

If a is an element of a Jordan algebra $\mathfrak{J}$ then we write R_a for the mapping $x \to x \cdot a (= a \cdot x)$ in $\mathfrak{J}$ and we set $U_a = 2R_a^2 - R_{a^2}$. As shown in I, the linear mapping $\eta = U_{a_1} U_{a_2} \cdots U_{a_r}$ such that $\prod_1^r N(a_i)^2 = 1$ is in $L(\mathfrak{J})$ for $\mathfrak{J}$ central simple. The set of these mappings is a subgroup $L_1(\mathfrak{J})$ of $L(\mathfrak{J})$ and this has the subgroup $L_2(\mathfrak{J})$ of $\eta = U_{a_1} U_{a_2} \cdots U_{a_r}$ with $\prod_1^r N(a_i) = 1$. We have called $L_2(\mathfrak{J})$ the *reduced n. p. group* of $\mathfrak{J}$ since for $\mathfrak{J}$ of type D this coincides with a reduced orthogonal group. In the first part of the present paper we determine the groups $L_1(\mathfrak{J})$ and $L_2(\mathfrak{J})$ for certain central simple $\mathfrak{J}$. One useful feature of $L_1(\mathfrak{J})$ which we note below is that if $\mathfrak{J}$ is a central simple subalgebra of a central simple Jordan algebra $\mathfrak{K}$ of the same degree as $\mathfrak{J}$ then every element η of $L_i(\mathfrak{J})$ can be extended to an element of $L_i(\mathfrak{K})$. We shall use this remark in our discussion of the structure of $L(\mathfrak{J})$ for $\mathfrak{J}$ a split exceptional Jordan algebra.

1. The groups $L_i(\mathfrak{J})$ for certain special $\mathfrak{J}$.

Let $\mathfrak{A}$ be an algebra which is strictly power associative and has an identily 1 and let $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ be a basis for $\mathfrak{A}$ over the base field Φ. Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ be algebraically independent over Φ and let $x = \Sigma \xi_i u_i$ in $\mathfrak{A}_\mathsf{P}$ where $\mathsf{P} = \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Then we have shown in I, page 179, that the minimum polynomial $m_x(\lambda)$ of x has the form

$$m_x(\lambda) = \lambda^m - \sigma_1(\xi)\, \lambda^{m-1} + \cdots + (-1)^m \sigma_m(\xi)$$

where $\sigma_i(\xi)$ is a homogeneous polynomial of degree 1 in the coordinates ξ_j. If $a = \Sigma \alpha_i u_i \in \mathfrak{A}$ then $m_a(\lambda)$ which is obtained from $m_x(\lambda)$ by specializing $\xi_i = \alpha_i$ is called the generic minimum polynomial of a, $\sigma_1(\alpha)$ the generic trace and $\sigma_m(\alpha)$ the generic norm of a. We write $T(a) = \sigma_1(\alpha)$, $N(a) = \sigma_m(\alpha)$ and call m the degree of $\mathfrak{A}$. Let $\mathfrak{B}$ be a subalgebra of $\mathfrak{A}$ containing 1 and suppose that $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, $r \leqq n$, is a basis for $\mathfrak{B}$. Then $x' = \sum_1^r \xi_k u_k$ is a generic element for $\mathfrak{B}$ and the minimum polynomial $m'_{x'}(\lambda)$ is a factor of $m_x(\lambda)$ which is obtained by setting $\xi_{r+1} = \cdots = \xi_m = 0$ in $m_x(\lambda)$. Moreover, if the degree m' of $\mathfrak{B}$ is the same as that of $\mathfrak{A}$ then we have $m'_{x'}(\lambda) = m_{x'}(\lambda)$ and consequently if $b \in \mathfrak{B}$ then the generic minimum polynomial, trace and norm computed for b as element of $\mathfrak{B}$ is the same as for b as element of $\mathfrak{A}$.

Now suppose $\mathfrak{J}$ is a central simple Jordan algebra and that $\mathfrak{K}$ is a central simple subalgebra whose degree is the same as that of $\mathfrak{J}$. Then $N(a)$ is unambiguously defined for $a \in \mathfrak{K}$. Let R'_a and R_a denote the multiplications by a in $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{J}$ respectively and let $U'_a = 2R'^2_a - R'_{a^2}$. If $\eta' \in L_1(\mathfrak{K})$, $\eta' = U'_{a_1} U'_{a_2} \cdots U'_{a_r}$ where the $a_i \in \mathfrak{K}$ and $\prod_1^r N(a_i)^2 = 1$. It is clear that η' has the extension $\eta = U_{a_1} U_{a_2} \cdots U_{a_r} \in L_1(\mathfrak{J})$. Similarly, any $\eta' \in L_2(\mathfrak{K})$ has an extension $\eta \in L_2(\mathfrak{J})$.

Now let $\mathfrak{J} = \Phi_m^+$, $m \geqq 2$, the Jordan algebra of all $m \times m$ matrices relative to the composition $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. Then $N(a) = \det a$ and $L(\mathfrak{J})$ is the set of mappings $x \to axb$ and $x \to ax'b$ where the $'$ denotes the transpose and $\det ab = 1$ (I, page 184 and

page 191)[4]). If $axb = x$ for all x in Φ_m^+ then $a = \alpha 1$ and $b = \alpha^{-1}1$, $\alpha \neq 0$ in Φ. Also we cannot have $ax'b = x$ for all x. Let Φ^* denote the multiplicative group of Φ and let $\Phi^{(m)}$ be the subgroup of Φ^* of *m-th* powers. Set $K = \Phi^*/\Phi^{(m)}$ and let T be the split extension of K by the cyclic group $[\sigma]$ of order two such that $\sigma k \sigma^{-1} = k^{-1}$ for $k \in K$. Thus the elements of T are the pairs (σ^i, k) and $(\sigma^i, k_1)(\sigma^j, k_2) = (\sigma^{i+j}, k_1^{-j}k_2)$.

If η is the mapping $x \to axb$ we set $\chi(\eta) = (1, \overline{\det b}) \in T$ where $\overline{\det b}$ is the coset $(\det b)\,\Phi^{(m)}$ in $\Phi^*/\Phi^{(m)}$. If η is the mapping $x \to ax'b$ we set $\chi(\eta) = (\sigma, \overline{\det b}) \in T$. The foregoing remarks show that $\eta \to \chi(\eta)$ is single-valued. Since any element of Φ is a determinant of some $a \in \Phi_m^+$, the image of $L(\Phi_m^+)$ under χ is T.

Let

$$\eta_1\colon\ x \to a_1 x b_1 \quad \text{and} \quad \eta_2\colon\ x \to a_2 x b_2.$$

Then

$$\eta_1\eta_2\colon\ x \to a_2 a_1 x b_1 b_2$$

and

$$\chi(\eta_1\eta_2) = (1, \overline{\det b_1 b_2}) = \chi(\eta_1)\,\chi(\eta_2).$$

If $\zeta\colon\ x \to x'$ then $\chi(\sigma) = (\sigma, 1)$ and

$$\chi(\zeta\eta_1) = (\sigma, \overline{\det b_1}) = (\sigma, 1)\,(1, \overline{\det b_1}) = \chi(\sigma)\,\chi(\eta_1).$$

Also we have $\eta_1\zeta = \zeta\eta_3$ where $\eta_3\colon\ x \to b_1' x a_1'$. Hence

$$\chi(\eta_1\zeta) = (\sigma, \overline{\det a_1}) = (\sigma, \overline{\det b_1^{-1}}) = (1, \overline{\det b_1})\,(\sigma, 1) = \chi(\eta_1)\,\chi(\sigma).$$

We have $\zeta^2 = 1$ and $\chi(\zeta) = (\sigma, 1)$ so that $\chi(\zeta^2) = \chi(\zeta)^2$. The relations we have established imply that χ is a homomorphism of $L(\Phi_m^+)$ onto T.

The kernel L^* of χ is the set of mappings $x \to axb$ such that $\det a = 1 = \det b$. Since the unimodular group is the commutator group of the full linear group, $L^* \leqq L'$ the commutator group of $L(\Phi_m^+)$. It follows that L' is the inverse image of the commutator subgroup T' of T. On the other hand, it is easy to see that T' is the set of elements $(1, k^2)$, $k \in \Phi^*/\Phi^{(m)}$. It follows that L' is the set of mappings $x \to axb$ such that $\det b$ is a square and $\det ab = 1$. In particular, if m is odd then L' is the set of mappings $x \to axb$ such that $\det ab = 1$. We shall show next that L^* coincides with the subgroup $L_2(\Phi_m^+)$ defined above. We note first the following

Lemma 1. *Let G be a group and G' the commutator subgroup. Then an element a of G is in G' if and only if a has the form*

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1}, \quad a_i \text{ in } G.$$

Proof. Set $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$. Then

$$\begin{aligned}(1)\quad a_1 \cdots a_n a_1^{-1} \cdots a_n^{-1} &= a_1 \cdots a_{n-1} a_1^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_{n-1} \cdots a_1 a_n a_1^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1} \\ &= a_1 \cdots a_{n-1} a_1^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1}\,(a_{n-1} \cdots a_1, a_n) \\ &= (a_1, a_2)\,(a_2 a_1, a_3) \cdots (a_{n-1} \cdots a_1, a_n)\end{aligned}$$

is in G'. Next let $n = 3r - 1$ and set

$$a_3 = (a_2 a_1)^{-1}, \quad a_6 = (a_5 a_4)^{-1}, \ldots, a_{3h} = (a_{3h-1} a_{3h-2})^{-1}, \ldots$$

Then

$$\begin{aligned}(2)\qquad &(a_1, a_2)\,(a_2 a_1, a_3) \cdots (a_{n-1} \cdots a_1, a_n) \\ &\quad = (a_1, a_2)\,(a_4, a_5)\,(a_7, a_8) \cdots (a_{3r-2}, a_{3r-1}).\end{aligned}$$

[4]) This result appears to go back to Frobenius [7]. In a somewhat different form it was rediscovered by Dieudonné (see the reference [10] in I).

This and (1) implies that any product of commutators has the form

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1}.$$

Lemma 2. *An element a is in G' if and only if there exist a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, such that $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ and $a_n \cdots a_1 = 1$.*

Proof. Let $a \in G'$ and write $a = a_1 \cdots a_{n-1} a_1^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1}$. Set $a_n = a_1^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1}$. Then $a = a_1 \cdots a_n$ and $a_n a_{n-1} \cdots a_1 = 1$. Conversely, if $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ with $a_n \cdots a_1 = 1$ then $a_1^{-1} \cdots a_n^{-1} = 1$ and $a = a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} \cdots a_n^{-1} \in G'$.

Now let $\eta = U_{a_1} U_{a_2} \cdots U_{a_r}$ in Φ_m^+ where $\Pi \det a_i = 1$. Since $xU_a = axa$,

$$x^\eta = a_r a_{r-1} \cdots a_1 x a_1 a_2 \cdots a_r \tag{3}$$

and

$$\det (a_1 \cdots a_r) = 1 = \det (a_r \cdots a_1).$$

Hence η has the form $x \to axb$ where $\det a = 1 = \det b$. Next let a be any unimodular matrix. Since the unimodular group is the commutator group of the full linear group, Lemma 2 implies that we can write $a = a_1 a_2 \cdots a_r$, $a_i \in \Phi_m^+$, such that $a_r a_{r-1} \cdots a_1 = 1$. Then $\eta = U_{a_1} U_{a_2} \cdots U_{a_r} \in L_2(\Phi_m^+)$ and $x^\eta = xa$. Similarly, every mapping of the form $x \to ax$, $\det a = 1$, is in L_2 and consequently, L_2 contains every mapping $x \to axb$ such that $\det a = 1 = \det b$. Hence L_2 coincides with the set of mappings of this form.

If $\eta \in L_1(\Phi_m^+)$ then $\eta = U_{a_1} U_{a_2} \cdots U_{a_r}$ where $\Pi \det a_i^2 = 1$. Hence $x^\eta = axb$ where $\det a = \pm 1 = \det b$. Conversely, let η be any mapping $x \to axb$ with $\det a = \pm 1 = \det b$. If $\det a = 1 = \det b$ then $\eta \in L_2 < L_1$ and if $\det a = -1 = \det b$ then $U_a \in L_1$ and $U_a^{-1}\eta \in L_2 < L_1$. Hence, in both cases, $\eta \in L_1$. The results we have established can be stated as follows.

Theorem 1. *The commutator group $L'(\Phi_m^+)$ and the groups $L_1(\Phi_m^+)$ and $L_2(\Phi_m^+)$ are subgroups of the group of mappings of the form $x \to axb$ where $\det ab = 1$. The conditions on a specifying these subgroups are:*

1) *$\det a$ is a square, for L',*

2) *$\det a = \pm 1$ for L_1,*

3) *$\det a = 1$ for L_2.*

We consider next the subalgebra $\mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma)$ of γ-symmetric matrices where $\gamma = \operatorname{diag} \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$, $\gamma_i \neq 0$ in Φ. The condition that $a \in \mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma)$, that is, γ-symmetry is that $\gamma^{-1} a' \gamma = a$ which is equivalent to: $(a\gamma^{-1})' = a\gamma^{-1} = b$. Hence $a \in \mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma)$ if and only if $a = b\gamma$ where b is a symmetric matrix. The geometric form of $\mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma)$ is the Jordan algebra of linear transformations which are self-adjoint relative to a non-degenerate symmetric bilinear form in an m dimensional vector space over Φ.

The generic norm in $\mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma)$ is $N(a) = \det a$ and the group $L(\mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma))$ is the set of mappings $x \to \varrho a^* x a$ where $a^* = \gamma^{-1} a' \gamma$ and $\varrho^m (\det a)^2 = 1$ (I, page 184 and page 193). We can now prove

Theorem 2. *The commutator subgroup $L'(\mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma))$ coincides with the subgroup $L_2(\mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma))$ and this group is the set of mappings $x \to a^* x a$ where $\det a = 1$. The group $L_1(\mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma))$ is the set of mappings $x \to a^* x a$ where $\det a = \pm 1$.*

Proof. It is easy to see that L' is the set of mappings $x \to a^* x a$, $\det a = 1$. If $\eta \in L_2$ then $\eta = U_{a_1} U_{a_2} \cdots U_{a_r}$ where the $a_i \in \mathfrak{H}$ and

$$\det a_1 a_2 \cdots a_r = \Pi \det a_i = 1.$$

Hence

$$x^\eta = a_r a_{r-1} \cdots a_1 x a_1 a_2 \cdots a_r = a^* x a$$

where $a = a_1 a_2 \cdots a_r$ and $\det a = 1$. Hence $\eta \in L'$ and so $L_2 \leqq L'$. To prove the reverse inequality it suffices to show that any unimodular matrix can be written as a product of γ-symmetric matrices. It suffices to prove this for any set of generators and we take these to be the matrices $1 + pe_{ij}$, $i \neq j$, $\{e_{ij}\}$ a set of matrix units for Φ_m. If $m = 2$ we have

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pr & r \\ r & 0 \end{pmatrix}$$

and the second and third matrices are symmetric and non-singular if $r \neq 0$. Right multiplication by diag $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ gives $\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c = d$ where c and d are non-singular and are in $\mathfrak{H}$. Hence $\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = dc^{-1}$ a product of two elements in $\mathfrak{H}$. A similar argument applies to the generators of the form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}$ and this can be extended in an obvious way to any $m \geqq 2$. This proves our assertion and implies the first statement of the theorem. If $\eta \in L_1$, $\eta = U_{a_1} U_{a_2} \cdots U_{a_r}$ where $\det a_1 \cdots a_r = \pm 1$. Hence $x^\eta = a^* xa$ where $\det a = \pm 1$. The converse that any mapping $x \to a^* xa$ with $\det a = \pm 1$ is in L_1 follows from the first part of the theorem and the observation that there exist $c \in \mathfrak{H}$ with $\det c = -1$. Thus we can take $c = \operatorname{diag} \{-1, 1, 1, \ldots 1\}$.

The same considerations apply to the Jordan algebra $\mathfrak{H}(\mathsf{P}_m, \gamma)$ of γ-hermitian matrices over P where P is a quadratic extension of the base field Φ and γ-hermitian means that $\gamma^{-1} a' \gamma = a$. Again $\gamma = \operatorname{diag} \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$, $\gamma_i = \bar{\gamma}_i \neq 0$ in Φ.

We consider next the sulalgebra $\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q)$ of symplectic symmetric matrices. Here q is a non-singular skew symmetric matrix such that the Pfaffian $Pf(q) = 1$ and $a \in \mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q)$ if and only if $q^{-1} a' q = a$. This is equivalent to the condition $(qa)' = -qa$. The generic norm $N(a) = Pf(qa)$ and $L(\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q))$ is the set of mappings $x \to \varrho a^* xa$ where $a^* = q^{-1} a' q$, $\varrho \in \Phi$, and $\varrho^m N(a^* a) = 1$ (I, page 184 and page 191). We have $N(a^* a) = Pf(qa^* a) = Pf(a' qa) = \det a$ (Artin [2] page 141). Hence the condition on a can be re-written as $\varrho^m \det a = 1$. It follows easily from this that the commutator subgroup $L'(\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q))$ coincides with the set of mappings $x \to a^* xa$ with $\det a = 1$. We shall show that this is also the group $L_i(\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q))$, $i = 1, 2$. Our proof of this will not be as direct as the foregoing. However, the incidental results on which the proof will be based are of interest on their own.

We consider the geometric form of $\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q)$. For this purpose let $\mathfrak{M}$ be a $2m$-dimensional vector space over Φ equipped with a non-degenerate skew symmetric bilinear form $[x, y]$. Then the Jordan algebra $\mathfrak{H}$ (relative to $A \cdot B = \frac{1}{2}(AB + BA)$) of linear transformations A which are self-adjoint relative to $[x, y]$ in the sense that $[xA, y] = [x, yA]$ is isomorphic to $\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q)$.

Let $E_1, E_2, \ldots, E_r$ be non-zero orthogonal idempotents belonging to $\mathfrak{H}$ such that $\sum_1^r E_i = 1$. Then $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}E_1 \oplus \mathfrak{M}E_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}E_r$ and $\mathfrak{M}E_i$ is orthogonal to $\mathfrak{M}E_j$ for any $i \neq j$. This implies that every $\mathfrak{M}E_i$ is non-isotropic. Since any one dimensional space is isotropic, $\dim \mathfrak{M}E_i \geqq 2$ and hence $r \leqq m$. Conversely, let $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_r$ where the $\mathfrak{M}_i$ are non-isotropic and mutually orthogonal. Then $1 = \sum E_i$ where the E_i are self-adjoint orthogonal idempotents such that $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}E_i$. In particular we may take $r = m$ and the $\mathfrak{M}_i$ to be two dimensional with basis (e_i, f_i), $i = 1, \ldots, m$, such that $[e_i, f_i] = 1$. It is easy to check that the matrix of any $A \in \mathfrak{H}$ relative to the basis $(e_i, f_i, e_2, f_2, \ldots, e_m, f_m)$ has the form (a_{ij}), $a_{ij} \in \Phi_2$, $i, j = 1, \ldots, m$, where $a_{ji} = u^{-1} a'_{ij} u$, $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. This shows that $\mathfrak{H}$ is isomorphic to the algebra of $m \times m$ hermitian matrices over the split quaternion algebra $\mathfrak{D} = \Phi_2$ in which the involution in $\mathfrak{D}$ is $a \to u^{-1} a' u$.

Now let $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} + \mathfrak{P}$ be a decomposition of $\mathfrak{M}$ as a direct sum of two totally isotropic m dimensional spaces. Then the spaces $\mathfrak{N}$ and $\mathfrak{P}$ are dual relative to $[x, y]$, that is, for every x in $\mathfrak{N}$ there is a $y \in \mathfrak{P}$ such that $[x, y] \neq 0$ and for every $y \in \mathfrak{P}$ there is an $x \in \mathfrak{N}$ such that $[x, y] \neq 0$. Let $\mathfrak{K}$ denote the subalgebra of $\mathfrak{H}$ of the linear transformations A such that $\mathfrak{N}A \subseteq \mathfrak{N}$ and $\mathfrak{P}A \subseteq \mathfrak{P}$. If $A \in \mathfrak{K}$, $[xA, y] = [x, yA]$ for any $x \in \mathfrak{N}$ and $y \in \mathfrak{P}$ which means that the restriction of A to $\mathfrak{P}$ is the adjoint relative to $[x, y]$ of the restriction of A to $\mathfrak{N}$. Hence the mapping of A into its restriction in $\mathfrak{N}$ is an isomorphism of $\mathfrak{K}$ into the Jordan algebra $\mathfrak{E}^+$ of linear transformations in $\mathfrak{N}$. Now let B be any linear transformation in $\mathfrak{N}$ and let C be its adjoint in $\mathfrak{P}$: $[xB, y] = [x, yC]$ for $x \in \mathfrak{N}$, $y \in \mathfrak{P}$. Let A be the linear transformation which coincides with B on $\mathfrak{N}$ and with C on $\mathfrak{P}$. Then $A \in \mathfrak{K}$. This shows that the mappings of $A \in \mathfrak{K}$ into its restriction defines an isomorphism of $\mathfrak{K}$ onto $\mathfrak{E}^+$.

Let $A \in \mathfrak{H}$ and let $\mathfrak{X}_1$ be the cyclic space relative to A generated by x. Then $\mathfrak{X}_1$ has a basis $(x, xA, \ldots, xA^{r-1})$ where r is the degree of the order polynomial $f(\lambda)$ of x. We have

$$[xA^k, xA^l] = [x, xA^{k+l}] = [xA^l, xA^k]$$

since A is selfadjoint. On the other hand,

$$[xA^k, xA^l] = -[xA^k, xA^l].$$

Hence $[xA^k, xA^l] = 0$ and $\mathfrak{X}_1$ is totally isotropic. We suppose now that x is a vector whose order $f(\lambda)$ is the minimum polynomial of A. We can choose a vector y such that

$$(4) \qquad [y, x] = [y, xA] = \cdots = [y, xA^{r-2}] = 0, \quad [y, xA^{r-1}] = 1.$$

Let R denote the matrix whose (i, j)-entry is $[yA^{i-1}, xA^{j-1}]$, $i, j = 1, \ldots, r$. Then

$$(5) \qquad R = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & 0 & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & 1 & & * \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

so that R is non-singular. This implies that $(y, yA, \ldots, yA^{r-1})$ is a linearly independent set. On the other hand, yA^r is a linear combination of the yA^i, $i < r$, since $f(\lambda)$ is the minimum polynomial of A. Hence the space $\mathfrak{Y}_1$ with basis $(y, yA, \ldots, yA^{r-1})$ is invariant under A and, as before, this space is totally isotropic. Also $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_1$ is non-isotropic and A-invariant. Hence $\mathfrak{M}_1^\perp$ is A-invariant and $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_1^\perp$. We can repeat the process with $\mathfrak{M}_1^\perp$ and continue in this way to obtain a decomposition

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_h$$

where the $\mathfrak{M}_i$ are non-isotropic and mutually orthogonal and $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{X}_i \oplus \mathfrak{Y}_i$ where $\mathfrak{X}_i$ and $\mathfrak{Y}_i$ are cyclic relative to A and hence are totally isotropic. Set

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{X}_h, \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{Y}_1 \oplus \mathfrak{Y}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{Y}_h.$$

Then $\mathfrak{N}$ and $\mathfrak{P}$ are totally isotropic and A-invariant. The argument of the last paragraph shows that A is contained in a subalgebra of $\mathfrak{H}$ which is isomorphic to $\mathfrak{E}^+$ the Jordan algebra of linear transformations in an m-dimensional vector space. We have therefore proved

Theorem 3. *Let $\mathfrak{H}$ be the Jordan algebra of linear transformations in a $2m$ dimensional space $\mathfrak{M}$ which are self-adjoint relative to a non-degenerate skew bilinear form $[x, y]$*

in $\mathfrak{M}$. Then any $A \in \mathfrak{H}$ can be imbedded in a subalgebra which is isomorphic to the Jordan algebra $\mathfrak{E}^+$ of linear transformations in an m-dimensional vector space $\mathfrak{N}$ over Φ.

We prove next the following result which in a slightly different form is due to Taussky and Zassenhaus ([13]).

Theorem 4. *Let A be a linear transformation in a finite dimensional vector space $\mathfrak{N}$ over Φ. Then there exists a non-degenerate symmetric bilinear form $\langle x, y\rangle$ in $\mathfrak{N}$ such that A is self-adjoint relative to $\langle x, y\rangle$.*

Proof. It suffices to prove the result for cyclic A. Hence we may assume that $\mathfrak{N}$ has a basis $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ such that

$$(6) \qquad \begin{aligned} &e_1 A = e_2,\ e_2 A = e_3, \ldots,\ e_{m-1} A = e_m, \\ &e_m A = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m. \end{aligned}$$

Let $\langle x, y\rangle$ be the bilinear form in $\mathfrak{N}$ such that

$$(7) \qquad \langle e_i, e_j\rangle = \lambda_{k-m} \in \Phi, \quad \text{if} \quad i + j = k$$

where

$$(8) \qquad \lambda_{k-m} = 0 \quad \text{if} \quad k \leqq m, \quad \lambda_1 = 1$$

and the other λ's are for the moment arbitrary. Evidently $\langle x, y\rangle$ is symmetric and a glance at the matrix $(\langle e_i, e_j\rangle)$ shows that $\langle x, y\rangle$ is non-degenerate. Also it is clear that $\langle e_i A, e_j\rangle = \langle e_i, e_j A\rangle$ if $i, j = 1, \ldots, m-1$. Hence A will be self-adjoint if and only if $\langle e_i A, e_m\rangle = \langle e_i, e_m A\rangle$ for $i = 1, \ldots, m$. This holds by the symmetry of $\langle x, y\rangle$ for $i = m$. Hence we have to consider the equations for $i = 1, 2, \ldots, m-1$. By (6) and (7), these equations are

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\lambda_2 = \alpha_m, \quad \lambda_3 = \alpha_{m-1} + \alpha_m \lambda_2, \quad \lambda_4 = \alpha_{m-2} + \alpha_{m-1}\lambda_2 + \alpha_m \lambda_3, \\ &\ldots, \lambda_m = \alpha_2 + \alpha_3 \lambda_2 + \cdots + \alpha_m \lambda_{m-1}, \end{aligned}$$

which have a unique solution. Hence we have $\langle x, y\rangle$ such that A is self-adjoint relative to $\langle x, y\rangle$.

The foregoing theorem implies that if $\mathfrak{E}^+$ is the Jordan algebra of linear transformations in an m-dimensional vector space $\mathfrak{N}$ over Φ then any element $A \in \mathfrak{E}^+$ can be imbedded in a subalgebra $\mathfrak{L}$ of $\mathfrak{E}^+$ which is isomorphic to the algebra of self-adjoint linear transformations relative to a non-degenerate symmetric bilinear form. In matrix form this states that any $a \in \Phi_m^+$ can be imbedded in a subalgebra $\mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma)$. If we combine this result with Theorem 3 we see that any $a \in \mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q)$ can be imbedded in a subalgebra Φ_m^+ and also in a subalgebra $\mathfrak{H}(\Phi_m, \gamma)$ of $\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q)$. We remark that all the algebras indicated have the same degree $(= m)$.

We can now prove the following

Theorem 5. *The commutator group $L'(\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q))$ of the n. p. group $L(\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q))$ coincides with the groups $L_1(\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q))$ and $L_2(\mathfrak{H}(\Phi_{2m}, q))$. All of these are the set of mappings $x \to a^* x a$, $a^* = q^{-1} a' q$, such that* det $a = 1$.

Proof. We have seen that L' is the set of mappings $x \to a^* x a$, det $a = 1$. Any element η of L_1 has the form $x \to a_r a_{r-1} \cdots a_1 x a_1 a_2 \cdots a_r$ where the $a_i \in \mathfrak{H}$ and $\Pi N(a_i)^2 = 1$. Since $N(a_i) = Pf(q a_i)$, $N(a_i)^2 = \det q a_i = \det a_i$. Hence $\det(a_1 \cdots a_r) = \Pi N(a_i)^2 = 1$ and $\eta \in L'$. Conversely, let $\eta \in L'$. Then $a = 1^\eta$ can be imbedded in a subalgebra $\mathfrak{K}$ of $\mathfrak{H}$ which is isomorphic to Φ_m^+. Since the degree of $\mathfrak{K}$ is the same as that of $\mathfrak{H}$ the generic norm $N(a) = 1$ in $\mathfrak{K}$ and so by Theorem 1 we can find a $\zeta' \in L_2(\mathfrak{K})$ such that $1^{\zeta'} = a = 1^\eta$. Also ζ' can be extended to a $\zeta \in L_2(\mathfrak{H})$ and if we set $\delta = \eta\zeta^{-1}$ then $\delta \in L'(\mathfrak{H})$ and $1^\delta = 1$. Since $1^\delta = 1$, $\delta \in G(\mathfrak{H})$ the group of automorphisms of $\mathfrak{H}$. Then $\delta \in G(\mathfrak{H}) \cap L'(\mathfrak{H})$.

Now if $\beta \in G(\mathfrak{H}) \cap L'(\mathfrak{H})$ then $x^\beta = b^* x b$ where $\det b = 1$. Conversely, if b satisfies these conditions then $\beta: x \to b^* x b$ is an automorphism and $\beta \in L'$. Hence $G(\mathfrak{H}) \cap L'(\mathfrak{H})$ is the set of mappings $x \to b^* x b$ with $\det b = 1$, $b^* b = 1$. Since the enveloping associative algebra of $\mathfrak{H}$ is Φ_{2m}, $b^* x b = c^* x c$ can hold for all x if and only if $c = \varrho b$. It follows that $G(\mathfrak{H}) \cap L'(\mathfrak{H})$ is isomorphic to the projective symplectic group, that is, to the factor group of the group of matrices b such that $b^* b = q^{-1} b' q b = 1$ or $b' q b = q$ relative to the subgroup $\{1, -1\}$. It is well known that this group is simple. Now let

$$\varepsilon: x \to a_r a_{r-1} \cdots a_1 x a_1 \cdots a_r$$

where $\Pi N(a_i) = 1$ and let $\beta: x \to b^* x b$ be in $G(\mathfrak{H}) \cap L'(\mathfrak{H})$. Then $\beta^{-1} \varepsilon \beta$ has the form

$$x \to a_r^\beta \cdots a_1^\beta x a_1^\beta \cdots a_r^\beta$$

and $\Pi N(a_i^\beta) = 1$. Hence $\beta^{-1} \varepsilon \beta$ is in $L_2(\mathfrak{H})$. This shows that $L_2(\mathfrak{H}) \cap G(\mathfrak{H})$ is an invariant subgroup of $L'(\mathfrak{H}) \cap G(\mathfrak{H})$. Since it is $\neq 1$, $L_2(\mathfrak{H}) \cap G(\mathfrak{H}) = L'(\mathfrak{H}) \cap G(\mathfrak{H})$. This implies that the element $\delta = \eta \zeta^{-1} \in L_2(\mathfrak{H})$. Hence $\eta \in L_2(\mathfrak{H})$ and $L'(\mathfrak{H}) \subseteq L_2(\mathfrak{H})$. Since $L_2(\mathfrak{H}) \subseteq L_1(\mathfrak{H}) \subseteq L'(\mathfrak{H})$ we have $L'(\mathfrak{H}) = L_1(\mathfrak{H}) = L(\mathfrak{H})$ as required.

Corollary. *Any unimodular matrix in Φ_{2m} is a product of symplectic symmetric matrices.*

Proof. Let $\det b = 1$. Then the theorem shows that there exist elements $a_i \in \mathfrak{H}$ such that $b^* x b = a_r \cdots a_1 x a_1 \cdots a_r$ for all $x \in \mathfrak{H}$. This implies that $b = \pm a_1 \cdots a_r = (\pm a_1) a_2 \cdots a_r$. Thus b is a product of elements of $\mathfrak{H}$, that is, of symplectic symmetric matrices.

2. Some general properties of $L(\mathfrak{J})$ for $\mathfrak{J}$ an exceptional simple Jordan algebra.

Let $\mathfrak{J}$ be a reduced simple exceptional Jordan algebra with coefficient algebra an arbitrary Cayley algebra $\mathfrak{C}$. This means that $\mathfrak{J}$ can be identified with the Jordan algebra $H(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ of three-rowed γ-hermitian Cayley matrices where $\gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. The multiplication composition in $H(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ is $X \cdot Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ and $X \in H(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ if and only if

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x & \gamma_1^{-1}\gamma_3 \bar{z} \\ \gamma_2^{-1}\gamma_1 \bar{x} & \xi_2 & y \\ z & \gamma_3^{-1}\gamma_2 \bar{y} & \xi_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

where $\xi_i \in \Phi$, $x, y, z \in \mathfrak{C}$ and $\bar{x}$ is the conjugate of x. Using the usual matrix units e_{ij} and setting $e_{ii} = e_i$ and for $x \in \mathfrak{C}$,

$$x_{ij} = x e_{ij} + \gamma_j^{-1} \gamma_i \bar{x} e_{ji} \tag{11}$$

we can write

$$X = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + x_{12} + y_{23} + z_{31}. \tag{12}$$

The e_i are orthogonal idempotents and the generic trace and norm are respectively:

$$\begin{aligned} T(X) &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \\ N(X) &= \xi_1 \xi_2 \xi_3 + T((xy)z) - \xi_1 \gamma_3^{-1} \gamma_2 N(y) - \xi_2 \gamma_1^{-1} \gamma_3 N(z) - \xi_3 \gamma_2^{-1} \gamma_1 N(x). \end{aligned} \tag{13}$$

If

$$Y \in \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3) \equiv \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, 1),$$

that is, $\bar{Y}' = Y$, then $X = Y\gamma$ satisfies

$$\gamma^{-1} \bar{X}' \gamma = \gamma^{-1} \gamma \bar{Y}' \gamma = Y\gamma = X.$$

The associative law used here is valid since γ is in the nucleus of $\mathfrak{C}_3$. Thus $X \in \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$, and $Y \to X = Y\gamma$ is a $1-1$ linear mapping τ of $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3)$ onto $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$. A direct calculation using (13) shows that

$$N(Y) = \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}N(X). \tag{14}$$

Thus

$$N(X) = \delta N(X^{\tau^{-1}}), \quad \delta = \gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Hence if $\eta \in L(\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma))$ and $Y \in \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3)$ then

$$N(Y^{\tau\eta\tau^{-1}}) = \delta^{-1}N(Y^{\tau\eta}) = \delta^{-1}N(Y^{\tau}) = N(Y).$$

Thus $\tau\eta\tau^{-1} \in L(\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3))$ and the mapping $\eta \to \tau\eta\tau^{-1}$ is an isomorphism of the n. p. group $L(\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma))$ onto $L(\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3))$. This remark shows that *the group $L(\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma))$ depends only on the coefficient algebra $\mathfrak{C}$.*

Let (X, Y, Z) denote the symmetric trilinear form associated with $N(X)$, that is

$$\begin{aligned}(X, Y, Z) = \tfrac{1}{6}\,[&N(X+Y+Z) - N(X+Y) - N(X+Z)\\ &- N(Y+Z) + N(X) + N(Y) + N(Z)]\end{aligned} \tag{15}$$

(cf I, page 188). Then a $1-1$ linear mapping η of $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ is in $L(\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma))$ if and only if $(X^\eta, Y^\eta, Z^\eta) = (X, Y, Z)$ for all X, Y, Z in $\mathfrak{J}$. The generic minimum polynomial of X is

$$N(\lambda 1 - X) = \lambda^3 - T(X)\,\lambda^2 + \tfrac{1}{2}((T(X))^2 - T(X^2))\,\lambda - N(X) \tag{16}$$

and we have

$$X^3 - T(X)\,X^2 + \tfrac{1}{2}(T(X)^2 - T(X^2))\,X - N(X)\,1 = 0. \tag{17}$$

Here the powers are in the Jordan sense so that $X^3 = \frac{1}{2}(XX^2 + X^2X)$. Following Freudenthal ([6]), we set

$$X \times X = X^2 - T(X)\,X + \tfrac{1}{2}(T(X)^2 - T(X^2))\,1. \tag{18}$$

Then (17) implies that

$$X \cdot (X \times X) = N(X)\,1. \tag{19}$$

The matrix $X \times X$ is the analogue of the adjoint matrix of ordinary matrix theory. A direct calculation, using (18) and (10) shows that

$$X \times X = \xi_1' e_1 + \xi_2' e_2 + \xi_3' e_3 + x_{12}' + y_{23}' + z_{31}' \tag{20}$$

where

$$\xi_1' = \xi_2\xi_3 - \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(y), \quad \xi_2' = \xi_3\xi_1 - \gamma_1^{-1}\gamma_3 N(z), \quad \xi_3' = \xi_1\xi_2 - \gamma_2^{-1}\gamma_1 N(x) \tag{21}$$

$$x' = \gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{z}\bar{y} - \xi_3 x, \quad y' = \gamma_2^{-1}\gamma_3\bar{x}\bar{z} - \xi_1 y, \quad z' = \gamma_3^{-1}\gamma_1\bar{x}\bar{y} - \xi_2 z. \tag{22}$$

These formulas show that if the entries of X lie in an associative commutative subalgebra then $X \times X$ is the usual adjoint matrix of X.

We linearize $X \times X$ to define

$$\begin{aligned}X \times Y &= \tfrac{1}{2}[(X+Y) \times (X+Y) - X \times X - Y \times Y]\\ &= X \cdot Y - \tfrac{1}{2}T(X)\,Y - \tfrac{1}{2}T(Y)\,X + \tfrac{1}{2}(T(X)\,T(Y) - T(X \cdot Y))\,1.\end{aligned} \tag{23}$$

If we take the trace of (17) we obtain

$$N(X) = \tfrac{1}{3}T(X^3) - \tfrac{1}{2}T(X)\,T(X^2) + \tfrac{1}{6}T(X)^3 \tag{24}$$

which can be linearized to give

$$\begin{aligned}(X, Y, Z) = \tfrac{1}{3}T((X \cdot Y) \cdot Z) &- \tfrac{1}{6}T(X \cdot Y)\,T(Z)\\ &- \tfrac{1}{6}T(X \cdot Z)\,T(Y) - \tfrac{1}{6}T(Y \cdot Z)\,T(X) + \tfrac{1}{6}T(X)\,T(Y)\,T(Z).\end{aligned} \tag{25}$$

On the other hand, if we write $(X, Y) = T(X \cdot Y)$ then, by (23),

$$(26)\quad (X \times Y, Z) = T((X \cdot Y) \cdot Z) - \tfrac{1}{2} T(X)\, T(Y \cdot Z) - \tfrac{1}{2} T(Y)\, T(X \cdot Z) - \tfrac{1}{2} T(Z)\, T(X \cdot Y) + \tfrac{1}{2} T(X)\, T(Y)\, T(Z).$$

Hence

$$(27)\qquad (X \times Y, Z) = 3(X, Y, Z).$$

The bilinear form (X, Y) is non-degenerate. If η is a linear transformation in $\mathfrak{J}$ we let η^* denote the transpose (or adjoint) of η relative to (X, Y) : $(X^\eta, Y) = (X, Y^{\eta^*})$. The condition for a non-singular η to be in $L(\mathfrak{J})$ is

$$\tfrac{1}{3}(X \times Y, Z) = (X, Y, Z) = (X^\eta, Y^\eta, Z^\eta) = \tfrac{1}{3}(X^\eta \times Y^\eta, Z^\eta) = \tfrac{1}{3}((X^\eta \times Y^\eta)^{\eta^*}, Z).$$

Hence a non-singular η is in $L(\mathfrak{J})$ if and only if

$$(28)\qquad (X \times Y)^{(\eta^*)^{-1}} = X^\eta \times Y^\eta.$$

An element X of $\mathfrak{J}$ is said to be of *rank one* if $X \neq 0$ and $X \times X = 0$. The last condition is that

$$X^2 = T(X)\, X + \tfrac{1}{2}(T(X^2) - T(X)^2)\, 1.$$

If $T(X) = 0$ this reduces to $X^2 = \frac{1}{2} T(X^2)\, 1$ so that $T(X^2) = \frac{2}{3} T(X^2) = 0$ and $X^2 = 0$. If $T(X) = 1$ we have $X^2 - X = \frac{1}{2}(T(X^2) - T(X))$ which implies that $X^2 = X$. If $T(X) = \beta \neq 0$ then $Y = \beta^{-1} X$ satisfies $Y \times Y = 0$ and $T(Y) = 1$ so that $Y^2 = Y$. We therefore see that X is of rank one if and only if either $X^2 = 0$, $X \neq 0$ or X is a non-zero multiple of a primitive idempotent element.

The conditions that X is of rank one are: $X \neq 0$ and $X \times X = 0$. The latter is equivalent to $(X, X, Y) = 0$ for all Y. If $\eta \in L(\mathfrak{J})$ we have $(X^\eta, X^\eta, Y^\eta) = 0$ so that $X^\eta \times X^\eta = 0$. It follows that $L(\mathfrak{J})$ leaves invariant the set Π of elements of rank one. It is clear also that $L(\mathfrak{J})$ leaves invariant the set $\mathfrak{U}$ of elements X such that $N(X) = 1$.

In discussing the structure of $L(\mathfrak{J})$ we shall distinguish two cases:

(1) $\mathfrak{J}$ split which means that the coefficient algebra $\mathfrak{C}$ is a split Cayley algebra;

(2) $\mathfrak{J}$ not split, that is, $\mathfrak{C}$ is a division algebra.

For the first of these the action of $\mathfrak{J}$ on $\mathfrak{U}$ will be decisive while in the second case we shall be concerned with the action on Π, or, more precisely on the Cayley plane whose points and lines are the rays of elements of Π.

3. The structure of $L(\mathfrak{J})$ for $\mathfrak{J}$ split.

It is known that if $\mathfrak{J}$ is split then we may take $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3)$ the set of hermitian three rowed matrices over the split Cayley algebra $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{J}$ contains subalgebras $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3)$ where $\mathfrak{D}$ is a split quaternion algebra and $\mathfrak{H}(\mathsf{P}_3)$, $\mathsf{P} \cong \Phi \oplus \Phi$. As we have seen in § 1, $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3) \cong \mathfrak{H}(\Phi_6, q)$ the algebra of 6×6 symplectic symmetric matrices. Also it is known that $\mathfrak{H}(\mathsf{P}_3) \cong \Phi_3^+$ and that $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3) \cong \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{H}(P_3) \cong \mathfrak{H}(P_3, \gamma)$, $\gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ (cf Albert-Jacobson [1] page 408).

We shall need the following imbedding theorem.

Theorem 6. *Any element a of a split exceptional simple Jordan algebra $\mathfrak{J}$ can be imbedded in a subalgebra $\mathfrak{K}$ which is isomorphic to Φ_3^+.*

Proof. The result is trivial if $a \in \Phi 1$. Hence we assume $a \notin \Phi 1$. By an argument we have used elsewhere (Jacobson [10], page 384) there exists a nilpotent element z such that $T(a \cdot z^2) \neq 0$ for the generic trace T. Then the subalgebra $\mathfrak{L}$ generated by a and z (and 1) is at most nine dimensional (loc. cit. page 382) and contains a subalgebra

of the form $\mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$ (loc. cit. page 384). It follows that we have an isomorphism of $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ so that $\mathfrak{L}$ is mapped into a subalgebra $\mathfrak{H}(Q_3, \gamma)$ where either $Q = \Phi$ or Q is a two dimensional subalgebra of $\mathfrak{C}$. Since Q can be imbedded in a split quaternion subalgebra $\mathfrak{D}$ of $\mathfrak{C}$ we have an imbedding of $\mathfrak{L}$, hence of a, in a subalgebra $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma) \cong \mathfrak{H}(\Phi_6, q)$. Our result now follows from Theorem 3.

We have shown in II that the group of automorphisms $G(\mathfrak{J})$ of $\mathfrak{J}$ is a simple group. We know also that $G(\mathfrak{J})$ is the subgroup of $L(\mathfrak{J})$ of η such that $1^\eta = 1$. If S is a subset of $\mathfrak{J}$ then we denote the subgroup of $L(\mathfrak{J})$ of η such that $s^\eta = s$ for all $s \in S$ by $L(\mathfrak{J}/S)$. The subgroups $L(\mathfrak{J}/\Phi a)$ where $N(a) = 1$ are all conjugate in $L(\mathfrak{J})$. This is a consequence of

Theorem 7. *If a is any element of a split exceptional simple Jordan algebra $\mathfrak{J}$ such that $N(a) = 1$ then there exists an $\eta \in L_2(\mathfrak{J})$ such that $1^\eta = a$.*

Proof. By Theorem 6, a is contained in a subalgebra $\mathfrak{K} \cong \Phi_3^+$. By Theorem 1, $L_2(\Phi_3^+)$ is the set of mappings $x \to bxc$ such that $\det b = 1 = \det c$. This implies that there exists an $\eta' \in L_2(\mathfrak{K})$ such that $1^{\eta'} = a$. It follows that there exists $\eta \in L_2(\mathfrak{J})$ such that $1^\eta = a$.

The conjugacy of the groups $L(\mathfrak{J}/\Phi a)$, $N(a) = 1$, and the simplicity of $G(\mathfrak{J}) = L(\mathfrak{J}/\Phi 1)$ implies the simplicity of every $L(\mathfrak{J}/\Phi a)$, $N(a) = 1$.

A scalar multiplication $\varrho 1 : x \to \varrho x$ is in L if and only if $\varrho^3 = 1$. The set of these elements is a subgroup C of order one or three in $L(\mathfrak{J})$. We can now prove the main result of this section.

Theorem 8. *Let $\mathfrak{J}$ be a split exceptional simple Jordan algebra and let H be an invariant subgroup of the n. p. group $L(\mathfrak{J})$ containing an element which is not a scalar multiplication. Then $H = L(\mathfrak{J})$. Hence L/C, C the subgroup of scalar multiplications of L, is a simple group.*

Proof. (1) We show first that $L(\mathfrak{J})$ is generated by the subgroups $L(\mathfrak{J}/\Phi a)$ such that $N(a) = 1$. Thus let $\eta \in L$. Then $b = 1^\eta$ is contained in a subalgebra $\mathfrak{K} \cong \Phi_3^+$ and we have seen that there exists an element $\zeta' \in L_2(\mathfrak{K})$ such that $1^{\zeta'} = b$. Now $L_2(\Phi_3^+)$ is the set of mappings $x \to cxd$ where $\det c = \det d = 1$ and the mappings of this form which are automorphisms are those such that $c = d^{-1}$. It follows easily from this and the structure of the unimodular group that any invariant subgroup of $L_2(\Phi_3^+)$ which contains an automorphism $\neq 1$ coincides with $L_2(\Phi_3^+)$. This implies that every element of $L_2(\Phi_3^+)$ and hence of $L_2(\mathfrak{K})$ is a product of conjugates of automorphisms. If α' is an automorphism in $\mathfrak{K}$ and α is an extension of α' to an element of $L(\mathfrak{J})$ then $1^\alpha = 1$ and α is an automorphism. Now the ζ' above can be written as $\zeta' = \beta_1' \beta_2' \cdots \beta_h'$ where the β_i' are conjugates in $L_2(\mathfrak{K})$ of automorphisms of $\mathfrak{K}$ belonging to $L_2(\mathfrak{K})$. It follows that we can extend ζ' to $\zeta \in L(\mathfrak{J})$ such that $\zeta = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_h$ where the β_i are conjugates of automorphisms of $\mathfrak{J}$. Now $1^\zeta = 1^\eta$. Hence $\beta = \eta\zeta^{-1}$ is an automorphism and $\eta = \beta\zeta = \beta\beta_1 \cdots \beta_r$ is a product of conjugates of automorphisms. If $\beta_i = \xi_i^{-1} \alpha_i \xi_i$, α_i an automorphism and ξ_i in $L(\mathfrak{J})$ then $a^{\beta_i} = a$ for $a = 1^{\xi_i}$, and $N(a) = 1$. Hence $\beta_i \in L(\mathfrak{J}/\Phi a)$ which proves our assertion that the $L(\mathfrak{J}/\Phi a)$ generate L.

(2) Any invariant subgroup of $L(\mathfrak{J})$ which contains an automorphism $\neq 1$ coincides with $L(\mathfrak{J})$. This is clear from (1) and the simplicity of the group of automorphisms $G(\mathfrak{J}) = L(\mathfrak{J}/\Phi 1)$.

(3) H contains an elements η such that $1^\eta \notin \Phi 1$. We show first that if η is not a scalar multiplication then there exists an a with $N(a) = 1$ and a^η not in Φa. Thus suppose $a^\eta = \varrho(a)\, a$, $\varrho(a) \in \Phi$, for every a with $N(a) = 1$. Let e be a primitive idempotent of $\mathfrak{J}$.

Then there exist three orthogonal primitive idempotents $e = e_1, e_2, e_3$ and the representation of $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3)$ can be chosen so that these are diagonal (II § 4). If $u_i = 2e_i - 1$ then $N(u_i) = 1$; hence $u_i^\eta = \varrho_i u_i$. Also $1^\eta = \varrho 1$ and $1 = -\sum_1^3 u_i$ so that $\varrho\left(\sum_1^3 u_i\right) = \Sigma \varrho_i u_i$. Since the u_i are linearly independent this gives $\varrho_i = \varrho$. Hence we have shown that $e^\eta = \varrho e$ for every primitive idempotent. Since the space spanned by the primitive idempotents is invariant under automorphisms and includes 1 it coincides with $\mathfrak{J}$ (II § 12). Hence we have $x^\eta = \varrho x$ for every $x \in \mathfrak{J}$ contrary to the assumption that η is not a scalar multiplication. Thus we have an $\eta \in H$ and an a with $N(a) = 1$ such that $a^\eta \notin \Phi a$. A suitable congugate ζ of η will satisfy $1^\eta \notin \Phi 1$.

(4) Let $\eta \in H$ have the property $b = 1^\eta \notin \Phi 1$ and imbed b in a subalgebra $\mathfrak{K} \cong \Phi_3^+$. Then $\mathfrak{K}$ can be imbedded in a subalgebra $\mathfrak{L} \cong \mathfrak{H}(\Phi_6, q)$. Assume now that $\mathfrak{L}^\eta \nsubseteq \mathfrak{L}$ and let u be an element of $\mathfrak{L}$ such that $u^\eta \notin L$. There exists an automorphism τ of period two whose set of fixed points is $\mathfrak{L}$. The mapping $\lambda = \eta\tau\eta^{-1}\tau \in H$ and satisfies $1^{\eta\tau\eta^{-1}\tau} = 1^{\eta\eta^{-1}\tau} = 1^\tau = 1$, $u^{\eta\tau} \neq u^\eta = u^{\tau\eta}$ so that $u^{\eta\tau\eta^{-1}\tau} \neq 0$. Hence λ is an automorphism $\neq 1$ in H and $H = L$ by (2).

(5) Let η and L be as in (4) but assume $L^\eta \leqq L$. The group $L(\mathfrak{H}(\Phi_6, q))$ is the set of mappings $x \to \varrho a^* x a$, $a^* = q^{-1}a'q$ and $\varrho^3 \det a = 1$ and $L_2(\mathfrak{H}(\Phi_6, q))$ is the subgroup defined by $\det a = 1$ (Theorem 5). It follows from the known structure of the full linear group that any subgroup of $L(\mathfrak{H}(\Phi_6, q))$ which contains a non-scalar and is invariant under $L_2(\mathfrak{H}(\Phi_6, q))$ contains all of $L_2(\mathfrak{H}(\Phi_6, q))$. In particular, such a subgroup contains mappings $x \to a^{-1}xa$, $a^*a = 1$, which are automorphisms $\neq 1$ of $\mathfrak{H}(\Phi_6, q)$. The extension argument used in (1) now shows that H contains an automorphism $\neq 1$. Hence $H = L$.

The arguments which we used to prove Theorem 5 and Theorem 7 imply the following result.

Theorem 9. *If $\mathfrak{J}$ is a split exceptional simple Jordan algebra the reduced n. p. group $L_2(\mathfrak{J})$ coincides with $L(\mathfrak{J})$.*

4. The order of $L(\mathfrak{J})$ for finite fields.

Let Φ be a finite field of order q. Then every central simple exceptional Jordan algebra $\mathfrak{J}$ over Φ is split and we know that the order of the group of automorphisms $G(\mathfrak{J})$ is

$$|G| = q^{24}(q^{12} - 1)(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1). \qquad \text{(II, p. 93)} \tag{29}$$

Since G is the subgroup of $L(\mathfrak{J})$ of elements η such that $1^\eta = 1$ and G acts transitively on the set $\mathfrak{U}$ of elements of norm 1 (Theorem 7), $|L| = |G|\,|\mathfrak{U}|$. It remains to determine $|\mathfrak{U}|$. If we represent $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3)$ then any element X of $\mathfrak{J}$ has the form (10) with the $\gamma_i = 1$ and

$$N(X) = \xi_1\xi_2\xi_3 + T((xy)z) - \xi_1 N(y) - \xi_2 N(z) - \xi_3 N(x). \tag{30}$$

We can re-write this as

$$N(X) = \xi\eta\zeta - \xi a - \eta b - \zeta c + T((xy)\bar{z}) \tag{31}$$

where

$$a = N(x), \quad b = N(y), \quad c = N(z) = N(\bar{z}). \tag{32}$$

Choose a basis $i_0 = 1, i_1, \ldots, i_7$ for $\mathfrak{C}$ so that $T(i_j) = 0$, $j > 0$ and if $x = \sum x_j i_j$, $x_j \in \Phi$ then $N(x) = \sum_0^7 x_j^2$. We recall that the number of solutions of

$$N(x) = \sum_0^7 x_j^2 = \alpha \tag{33}$$

is

$$q^7 - q^3 \text{ if } \alpha \neq 0, \quad q^7 + q^4 - q^3 \text{ if } \alpha = 0 \tag{34}$$

(Bourbaki [3] page 175). We shall require also the following

Lemma 3. *If $x \neq 0$ is in $\mathfrak{C}$ and $N(x) = 0$ then the number of elements y in $\mathfrak{C}$ such that $xy = 0$ is q^4.*

Proof. This will follow by showing that the space of y satisfying $xy = 0$ is four dimensional. We can imbed x in a (split) quaternion subalgebra $\mathfrak{D}$ and write $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} + \mathfrak{D}l$ so that if $y = u + vl$, $u, v \in \mathfrak{D}$ then $xy = xu + (vx)\,l$. Since $\mathfrak{D}$ is isomorphic to the two-rowed matrix algebra the spaces of u and $v \in \mathfrak{D}$ satisfying $xu = 0$, $vx = 0$ are two dimensional. Hence the space of y such that $xy = 0$ is four dimensional.

Let $\mathfrak{U}_0$ be the cone of elements X such that $N(X) = 0$, $\mathfrak{U}_0'$ the subset of the $X \in \mathfrak{U}_0$ as in (31) such that $\zeta \neq 0$ and $\mathfrak{U}_0''$ the subset of $X \in \mathfrak{U}_0$ with $\zeta = 0$. To determine $|\mathfrak{U}_0'|$ we write $w = xy = \sum_0^7 w_j i_j$, $w_j \in \Phi$, $z = \sum z_j i_j$, $z_j \in \Phi$. Then $T((xy)\bar{z}) = 2\sum w_j z_j$, $\sum w_j^2 = ab$. Then $\zeta N(X) = 0$ is equivalent to

$$\sum_{j=0}^7 (\zeta z_j - w_j)^2 = (\xi\zeta - b)\,(\eta\zeta - a). \tag{35}$$

The number of choices of $\zeta \neq 0$, x, y is $(q-1)\,q^{16}$. The number of choices of ξ, η so that $(\xi\zeta - b)\,(\eta\zeta - a) \neq 0$ is $(q-1)^2$ and the number such that the product is 0 is $2q - 1$. In the first case the choice of z to satisfy (35) amounts to solving $\sum_0^7 z_j^2 = \alpha \neq 0$ and in the second to solving $\sum_0^7 z_j^2 = 0$. It follows that

$$\begin{aligned} |\mathfrak{U}_0'| &= (q-1)\,q^{16}\{(q-1)^2(q^7 - q^3) + (2q-1)\,(q^7 + q^4 - q^3)\}, \\ &= (q-1)\,q^{25} + (q-1)^2 q^{20}. \end{aligned} \tag{36}$$

To calculate $|\mathfrak{U}_0''|$ we note first that the number of $x, y \in \mathfrak{C}$ such that $a = N(x) = 0$, $b = N(y) = 0$, $xy = 0$ is

$$q^{11} + q^8 - q^3. \tag{37}$$

Thus if $x = 0$ then we require that $N(y) = 0$ which gives $q^7 + q^4 - q^3$ elements y. The number of $x \neq 0$ with $N(x) = 0$ is $q^7 + q^4 - q^3 - 1$. For each such x we have q^4 elements y such that $xy = 0$; hence $N(y) = 0$ (Lemma 3). This gives $q^7 + q^4 - q^3 + (q^7 + q^4 - q^3 - 1)\,q^4 = q^{11} + q^8 - q^3$ solutions. If $\zeta = a = b = xy = 0$ then any ξ, η, z will satisfy $N(X) = 0$, X as in (31). We obtain in this way

$$(q^{11} + q^8 - q^3)\,q^{10} \tag{38}$$

solutions. Otherwise the number of choices for x, y is $q^{16} - (q^{11} + q^8 - q^3)$ and if $\zeta = 0$ then we have to choose ξ, η, z so that $\xi a + \eta b = T((xy)\bar{z})$ which is a nonzero linear homogeneous equation in ξ, η and the coordinates z_i of z. Hence this gives q^9 solutions and altogether we have

$$\begin{aligned} |\mathfrak{U}_0''| &= (q^{11} + q^8 - q^3)\,q^{10} + (q^{16} - q^{11} - q^8 + q^3)\,q^9, \\ &= q^{25} + (q^{10} - q^9)\,(q^{11} + q^8 - q^3). \end{aligned} \tag{39}$$

Addition of (36) and (39) gives

$$(40) \qquad |\mathfrak{U}_0| = q^{26} + (q-1)(q^{21} + q^{17} - q^{12}).$$

As before let $\mathfrak{U}$ be the set of X such that $N(X) = 1$ and if $\beta \in \Phi$ let $\mathfrak{U}_\beta$ be the set of X such that $N(X) = \beta$. If $\beta \neq 0$ set $y = \operatorname{diag}\{\beta^{-1}, 1, 1\}$ and let $\eta = \beta U_y$. Then η is a $1-1$ linear mapping in $\mathfrak{J}$ and $N(X^\eta) = \beta N(X)$. It follows that $|\mathfrak{U}| = |\mathfrak{U}_\beta|$; consequently $|\mathfrak{U}| = \dfrac{q^{27} - |\mathfrak{U}_0|}{q-1}$. Using (40) this gives

$$(41) \qquad |\mathfrak{U}| = q^{12}(q^9 - 1)(q^5 - 1)^5).$$

Since $|L(\mathfrak{J})| = |G|\,|\mathfrak{U}|$, (29) and (41) give the following

Theorem 10. *If Φ is a finite field with q elements the order $|L(\mathfrak{J})|$ of the n. p. group of the exceptional simple Jordan algebra over Φ is*

$$(42) \qquad |L(\mathfrak{J})| = q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1).$$

5. Definition of certain elements of $L(\mathfrak{J})$.

In this section we consider the general case again: $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$, $\mathfrak{C}$ an arbitrary Cayley algebra. If $p \in \mathfrak{C}$ we define

$$(43) \qquad P_{ij} = 1 + pe_{ij}, \quad i \neq j,$$

and we note first that if X is any matrix in $\mathfrak{C}_3$ then $(P_{ij}X)P_{ij}^* = P_{ij}(XP_{ij}^*)$ for $P_{ij}^* = \gamma^{-1}\overline{P}'_{ij}\gamma = \gamma^{-1}Q_{ji}\gamma$, $q = \overline{p}$. More generally, let $\mathfrak{D}$ be any subalgebra of $\mathfrak{C}$ (containing 1) generated by a single element p of $\mathfrak{C}$. Since p satisfies a quadratic equation the elements of $\mathfrak{D}$ have the form $\alpha + \beta p$, α, β in Φ and $\overline{p} \in \mathfrak{D}$. It follows from this and the alternative identities in $\mathfrak{C}$ that

$$(44) \qquad \begin{gathered}(d_1d_2)x = d_1(d_2x), \quad (d_1x)d_2 = d_1(xd_2),\\ x(d_1d_2) = (xd_1)d_2\end{gathered}$$

holds for $d_1, d_2 \in \mathfrak{D}$, $x \in \mathfrak{C}$. Thus $\mathfrak{C}$ is a two sided associative $\mathfrak{D}$-module relative to the multiplication in $\mathfrak{C}$. The relations (44) and the definition of matrix multiplication imply that if $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}_3$ and $X \in \mathfrak{C}_3$ then

$$(45) \qquad \begin{gathered}(D_1D_2)X = D_1(D_2X), \quad (D_1X)D_2 = D_1(XD_2),\\ X(D_1D_2) = (XD_1)D_2.\end{gathered}$$

These relations imply that any product involving a number of elements $D_i \in \mathfrak{D}_3$ and a single element $X \in \mathfrak{C}_3$ is independent of the association of the factors. Hence such a product can be written without parantheses. In particular, we have

$$P_{ij}XP_{ij}^* \equiv (P_{ij}X)P_{ij}^* = P_{ij}(XP_{ij}^*).$$

If $X \in \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$, which means that $X^* = \gamma^{-1}\overline{X}'\gamma = X$, then

$$(P_{ij}XP_{ij}^*)^* = P_{ij}X^*P_{ij}^* = P_{ij}XP_{ij}^* \in \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma).$$

Thus

$$(46) \qquad p_{ij}\colon X \to P_{ij}XP_{ij}^*, \quad X \in \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$$

is a mapping of $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ into itself[6]). If we let $r = -p$ then $P_{ij}R_{ij} = 1 = R_{ij}P_{ij}$ and this implies that r_{ij} is the inverse of p_{ij}. Hence p_{ij} is a $1-1$ linear mapping of $\mathfrak{J}$ onto itself. We now verify

[5]) I am indebted to Professor L. Carlitz for the present proof of the formula (41) for $|\mathfrak{U}|$. My original proof was considerably more complicated and was based on a classification of the elements of $\mathfrak{J}$ according to their minimum polynomials and an enumeration of the elements of these classes.

[6]) These transformations were introduced by Freudenthal in the Russian translation of [6].

Proposition 1. $p_{ij} \in L(\mathfrak{J})$.

Proof. Suppose first that $\gamma = 1$ and take X as in (10) with the $\gamma_i = 1$. Then

$$X^{p_{12}} = \begin{pmatrix} \xi_1 + T(x\bar{p}) + \xi_2 N(p) & x + \xi_2 p & \bar{z} + py \\ \bar{x} + \xi_2 \bar{p} & \xi_2 & y \\ z + \overline{py} & \bar{y} & \xi_3 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Hence

$$\begin{aligned} N(X^{p_{12}}) &= \xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_3 T(x\bar{p}) + \xi_3\xi_2^2 N(p) \\ &\quad + T(x + \xi_2 p)\, y(z + \overline{py}) - (\xi_1 + T(x\bar{p}) + \xi_2 N(p))\, N(y) \\ &\quad - \xi_2 N(z + \overline{py}) - \xi_3 N(x + \xi_2 p) \\ &= \xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_3 T(x\bar{p}) + \xi_3\xi_2^2 N(p) + T(xyz) \\ &\quad + T(xy)\,(\overline{py}) + \xi_2 T(py)\,(\overline{py}) + \xi_2 T(pyz) \\ &\quad - \xi_1 N(y) - T(x\bar{p})\, N(y) - \xi_2 N(p)\, N(y) - \xi_2 N(z) \\ &\quad - \xi_2 N(\overline{py}) - \xi_2 T(zpy) - \xi_3 N(x) - \xi_3\xi_2^2 N(p) - \xi_2\xi_3 T(x\bar{p}). \end{aligned}$$

We make the obvious cancellations in this and note that

$$T((xy)\,(\overline{py})) = T((xy)\,(\bar{y}\bar{p}) = T((xy)\,\bar{y})\,\bar{p} = T(x(y\bar{y}))\,\bar{p} = N(y)\, T(x\bar{p}),$$

which permits the cancellation of the fifth and ninth terms. This leaves the expression for $N(X)$. Hence $N(X^{p_{12}}) = N(X)$. Let $k \neq l = 1, 2, 3$ and set

$$\Pi_{kl} = 1 - e_{kk} - e_{ll} + e_{kl} + e_{lk}.$$

Then $\Pi'_{kl} = \Pi_{kl}$ and $\Pi_{kl}^2 = 1$ and Π_{kl} is in the nucleus of $\mathfrak{C}_3$. Hence $X \to \Pi_{kl} X \Pi_{kl}$ is an automorphism π_{kl} of $\mathfrak{C}_3$ which maps $\mathfrak{J}$ into itself. Hence $N(X^{\pi_{kl}}) = N(X)$, $X \in \mathfrak{J}$. Also $N(X^{\pi_{23} p_{12} \pi_{23}}) = N(X)$. Now

$$X^{\pi_{23} p_{12} \pi_{23}} = \Pi_{23} P_{12} \Pi_{23} X \Pi_{23} \bar{P}'_{12} \Pi_{23} = X^{p_{13}}$$

since $P_{13} = \Pi_{23} P_{12} \Pi_{23}$. Hence $N(X) = N(X^{p_{13}})$. A similar argument can be used to establish $N(X) = N(X^{p_{ij}})$ for every $i \neq j$, $X \in H(\mathfrak{C}_3)$. Now let $X \in H(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ and consider $N(X^{p_{ij}}) = N(P_{ij} X \gamma^{-1} \bar{P}'_{ij} \gamma)$. Since $X\gamma^{-1} \in \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3)$,

$$P_{ij} X \gamma^{-1} \bar{P}'_{ij} \in \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3) \text{ and } N(X\gamma^{-1}) = N(P_{ij} X \gamma^{-1} \bar{P}'_{ij}).$$

Also we have seen (§ 1) that $N(X) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 N(X\gamma^{-1})$. Hence $N(X^{p_{ij}}) = N(X)$, $X \in \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$.

As before we write

$$x_{ij} = x e_{ij} + \gamma_j^{-1} \gamma_i \bar{x} e_{ji} \in \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma).$$

Then we can verify that

$$\begin{aligned} e_i^{p_{ij}} &= e_i, & e_j^{p_{ij}} &= e_j + \gamma_j^{-1}\gamma_i N(p)\, e_i + p_{ij}, & e_k^{p_{ij}} &= e_k \\ x_{ji}^{p_{ij}} &= x_{ji} + T(px)\, e_i, & x_{jk}^{p_{ij}} &= x_{jk} + (px)_{ik}, & x_{ki}^{p_{ij}} &= x_{ki}. \end{aligned} \tag{48}$$

It should be noted that p_{ij} has a two-fold meaning in these formulas: as element

$$p_{ij} = p e_{ij} + \gamma_j^{-1} \gamma_i \bar{p} e_{ij}$$

and as operator p_{ij} defined before. It will be clear from the context which p_{ij} is intended. The formulas (48) completely describe the mapping p_{ij}.

For a particular isomorphism R of $\mathfrak{J}$ onto $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ we let $\tilde{L}_R(\mathfrak{J})$ denote the subgroup of $L(\mathfrak{J})$ generated by the p_{ij}, $p \in \mathfrak{C}$, $i \neq j$. Let P be a quadratic subfield of $\mathfrak{C}$ and let U be a unimodular matrix in P_3. For the representation R of $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ we define the mapping $X \to UXU^*$ of $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$. We have the following

Proposition 2. *If* P *is a quadratic subfield of* $\mathfrak{C}$ *and* U *is a unimodular matrix in* P_3 *then the mapping* $X \to UXU^*$, $U^* = \gamma^{-1}\bar{U}'\gamma$, *is in* $\widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$ *and this maps* $\mathfrak{H}(\mathsf{P}_3, \gamma)$ *into itself.*

Proof. We have seen that if U_1 and U_2 have entries in P then

$$(U_1 U_2)\, X(U_1 U_2)^* = U_1(U_2 X U_2^*)\, U_1^*.$$

Since the unimodular group is generated by the matrices P_{ij}, $p \in \mathsf{P}$, it is clear that the mappings $X \to UXU^*$, $U \in \mathsf{P}_3$, are just the elements of the subgroup of $\widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$ generated by the p_{ij}, $p \in \mathsf{P}$. Evidently these mappings leave $\mathfrak{H}(\mathsf{P}_3, \gamma)$ invariant.

Proposition 3. *If* $\eta \in L(\mathfrak{J})$ *then* $\eta^* \in L(\mathfrak{J})$.

Proof. η^* denotes the transpose of η relative to the trace form (X, Y). An extension field argument can be used to reduce the proof to the case of an algebraically closed base field. Then $\mathfrak{J}$ is split and by Theorem 7, $\eta = \beta\zeta$ where β is an automorphism and $\zeta \in L_2(\mathfrak{J})$. Then $\eta^* = \zeta^*\beta^*$. If β is an automorphism $(X^\beta, Y^\beta) = (X, Y)$ so that $\beta^* = \beta^{-1} \in L(\mathfrak{J})$. We have $\zeta = U_{B_1} U_{B_2} \cdots U_{B_r}$, $B_i \in L(\mathfrak{J})$, $\Pi N(B_i) = 1$. Also $U_B = 2R_B^2 - R_{B^2}$. Since $(X \cdot B, Y) = (X, Y \cdot B)$, $R_B^* = R_B$. Hence $U_B^* = U_B$ and

$$\zeta^* = U_{B_r} \cdots U_{B_2} U_{B_1} \in L_2(\mathfrak{J}).$$

Hence $\eta^* \in L(\mathfrak{J})$.

The mapping $\eta \to (\eta^*)^{-1} = (\eta^{-1})^*$ is an automorphism of period two in $L(\mathfrak{J})$. We shall call this the *contragredient* mapping in $L(\mathfrak{J})$. We have seen that $\eta \in L(\mathfrak{J})$ if and only if

$$(X \times Y)^{(\eta^*)^{-1}} = X^\eta \times Y^\eta.$$

If we apply this to $(\eta^*)^{-1}$ we see that a non-singular linear transformation of $\mathfrak{J}$ is in $L(\mathfrak{J})$ if and only if

$$(X \times Y)^\eta = X^{(\eta^*)^{-1}} \times Y^{(\eta^*)^{-1}}. \tag{49}$$

The Peirce spaces Φe_i, $\mathfrak{J}_{ij} = \{x_{ij} \mid x \in \mathfrak{C}\}$, $i \neq j$ are orthogonal relative to the trace (X, Y). This implies that the only non-zero $(X^{p_{ij}}, Y)$ for X, Y in these Peirce spaces are

$$\begin{aligned}
&(e_i^{p_{ij}}, e_i) = 1, && (e_j^{p_{ij}}, e_i) = \gamma_j^{-1}\gamma_i N(p)\\
&(e_j^{p_{ij}}, e_j) = 1, && (e_j^{p_{ij}}, y_{ji}) = T(py)\\
&(e_k^{p_{ij}}, e_k) = 1, && (x_{ji}^{p_{ij}}, e_i) = T(px)\\
&(x_{ji}^{p_{ij}}, y_{ij}) = T(xy), && (x_{jk}^{p_{ij}}, y_{kj}) = T(xy)\\
&(x_{jk}^{p_{ij}}, y_{ki}) = T(pxy), && (x_{ki}^{p_{ij}}, y_{ik}) = T(xy)
\end{aligned} \tag{50}$$

where i, j, k are distinct indices in the range 1, 2, 3. If we interchange i, j and replace p by $\bar{p}$ these relations become

$$\begin{aligned}
&(e_j^{\bar{p}_{ji}}, e_j) = 1, && (e_i^{\bar{p}_{ji}}, e_j) = \gamma_i^{-1}\gamma_j N(p),\\
&(e_i^{\bar{p}_{ji}}, e_i) = 1, && \\
&(e_i^{\bar{p}_{ji}}, \bar{y}_{ij}) = T(\bar{p}\bar{y}) = T(py), && (e_k^{\bar{p}_{ji}}, e_k) = 1,\\
&(\bar{x}_{ij}^{\bar{p}_{ji}}, e_j) = T(px), && (x_{ij}^{\bar{p}_{ji}}, y_{ji}) = T(xy),\\
&(x_{ik}^{\bar{p}_{ji}}, y_{ki}) = T(xy), && (x_{ik}^{\bar{p}_{ji}}, y_{kj}) = T(\bar{p}xy),\\
& && (x_{kj}^{\bar{p}_{ji}}, y_{jk}) = T(xy).
\end{aligned}$$

These and the relation $x_{ij} = \gamma_j^{-1}\gamma_i\bar{x}_{ji}$ imply the following formulas for $q = \gamma_j^{-1}\gamma_i\bar{p}$:

$$(e_i, e_i^{q_{ji}}) = 1, \qquad (e_j, e_i^{q_{ji}}) = \gamma_j^{-1}\gamma_i N(p),$$
$$(e^j, e_j^{q_{ji}}) = 1,$$
$$(e_j, y_{ji}^{q_{ji}}) = (e_j, \gamma_i^{-1}\gamma_j\overline{y_{ij}}^{q_{ji}}) = T(py),$$
$$(x_{ji}, e_i^{q_{ji}}) = (\gamma_i^{-1}\gamma_j\bar{x}_{ij}, e_i^{q_{ji}}) = T(px), \quad (e_k, e_k^{q_{ji}}) = 1,$$
$$(x_{ji}, y_{ij}^{q_{ji}}) = T(xy), \qquad (x_{jk}, y_{kj}^{q_{ji}}) = T(xy),$$
$$(x_{jk}, y_{ki}^{q_{ji}}) = T(pxy), \qquad (x_{ki}, y_{ik}^{q_{ji}}) = T(xy).$$

Comparison with (50) shows that q_{ji} is the transpose of p_{ij}. Hence we have

Proposition 4. *If $p_{ij} \in \widetilde{L}_R$ then $p_{ij}^* = \overline{\gamma_j^{-1}\gamma_i p_{ji}} \in \widetilde{L}_R$.*

This result shows that $\widetilde{L}_R$ is closed under the contragredient mapping $\eta \to (\eta^*)^{-1}$. If P is a quadratic subfield then we have seen that $X \to UXU^*$, U unimodular in P_3, is an element of $\widetilde{L}_R$. It is easy to see from Proposition 4 that the transpose of the mapping indicated is $X \to U^*XU$.

6. The Cayley plane.

In this section we assume that $\mathfrak{C}$ is a division algebra and we shall define the Freudenthal-Springer version of the Cayley plane $\mathfrak{P}$ associated with $\mathfrak{C}$.

As before, we let Π denote the set of elements of rank one in $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$. If X is as in (10) the conditions that $X \in \Pi$ are $X \neq 0$ and $X \times X = 0$ which implies

$$(51) \qquad \xi_2\xi_3 = \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(y), \quad \xi_1\xi_3 = \gamma_1^{-1}\gamma_3 N(z), \quad \xi_1\xi_2 = \gamma_2^{-1}\gamma_1 N(x).$$

If $\xi_1 = 0$ then $N(z) = 0 = N(x)$ so that $z = 0 = x$. Similarly, $\xi_2 = 0$ implies $x = 0 = y$ and $\xi_3 = 0$ implies $y = 0 = z$. If $x = 0$ either $\xi_1 = 0$ or $\xi_2 = 0$. Accordingly either $z = 0$ or $y = 0$. Similarly if $y = 0$ then either $\xi_2 = 0 = x$ or $\xi_3 = 0 = z$ and if $z = 0$ then either $\xi_3 = 0 = y$ or $\xi_1 = 0 = x$. In all of these cases the entries of X are contained in a quadratic subfield P of $\mathfrak{C}$. If $\xi_1 = x = z = 0$ then either $\xi_2 \neq 0$ or $\xi_3 \neq 0$. If $\xi_2 \neq 0$ we can multiply X by a non-zero element and obtain $\xi_2 = 1$. Then $\xi_3 = \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(y)$ and the new X has the form

$$e_2 + \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(y)\, e_3 + y_{23}.$$

It follows that if $X \in \Pi$ either all the entries of X are non-zero or X is a multiple of an element of one of the following forms:

$$(52) \quad e_1 + \gamma_2^{-1}\gamma_1 N(x)\, e_2 + x_{12}, \quad e_2 + \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(x)\, e_3 + x_{23}, \quad e_3 + \gamma_1^{-1}\gamma_3 N(x)\, e_1 + x_{31}.$$

Proposition 5. *Let $X, Y \in \Pi$. Then there exists an $\eta \in \widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$ and a $\varrho \in \Phi$ such that $X^\eta = \varrho Y$.*

Proof. It suffices to show this for $Y = e_1$. Assume first that

$$X = \varrho(e_1 + \gamma_2^{-1}\gamma_1 N(x)\, e_2 + x_{12}).$$

Then, by (48), if $p = \gamma_1\gamma_2^{-1}\bar{x}$, $e_1^{p_{21}} = \varrho^{-1}X$ so the result holds. Next let

$$X = \varrho\,(e_2 + \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(x)\, e_3 + x_{23}).$$

Then we have a $\zeta \in \widetilde{L}_R$ such that $X^\zeta = \varrho e_2$ and it suffices to show that there exists a $\xi \in \widetilde{L}_R$ which transforms e_1 into a multiple of e_2. Let

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Then U is unimodular; hence ξ: $X \to UXU^*$ is in $\widetilde{L}_R$ (Proposition 2). One verifies that $e_1^\xi = \gamma_1^{-1}\gamma_2 e_2$. A similar argument applies if

$$X = \varrho(e_3 + \gamma_1^{-1}\gamma_3 N(x)\, e_1 + x_{31}).$$

Now assume none of the entries of X is 0. If X is as in (10) then the component of $X^{p_{12}}$ in the Peirce space $\mathfrak{J}_{12}$ is, according to (48), $\xi_2 p_{12} + x_{12}$. Since $\xi_2 \neq 0$, p can be chosen so that $\xi_2 p_{12} + x_{12} = 0$. This reduces the proof to one of the cases already treated.

Proposition 6. *If $X, Y \in \Pi$ and X and Y are linearly independent then $X \times Y \in \Pi$ and*

$$(X, X \times Y) = 0 = (Y, X \times Y).$$

Proof. Suppose first that $Y = e_1$ and X is arbitrary of the form (10). A direct calculation, using the definition (23) shows that

$$X \times e_1 = \tfrac{1}{2}(\xi_3 e_2 + \xi_2 e_3 - y_{23}). \tag{53}$$

If $X \times e_1 = 0$,

$$\xi_2 = \xi_3 = y = 0$$

and (51) imply that X is a multiple of $Y = e_1$, contrary to hypothesis. Hence $X \times e_1 \neq 0$. Since $X \in \Pi$,

$$\xi_2\xi_3 = \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(y) = \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(-y).$$

This implies that $X \times e_1$ given by (53) is of rank one. Now let X and Y be arbitrary and choose $\eta \in \widetilde{L}_R$ so that $Y^\eta = \varrho e_1$. By (28),

$$(X \times Y)^{(\eta^*)^{-1}} = \varrho(X^\eta \times e_1).$$

Since X^η is not a multiple of $Y^\eta = \varrho e_1$,

$$\varrho(X^\eta \times e_1) \in \Pi.$$

Hence $X \times Y \in \Pi$. We have

$$(X \times Y, X) = 3(X, Y, X) = 3(X, X, Y) = (X \times X, Y) = 0.$$

Similarly $(X \times Y, Y) = 0$.

Proposition 7. *If $X, Y, U \in \Pi$, X, Y linearly independent and $(X, U) = 0 = (Y, U)$ then $U = \varrho X \times Y$.*

Proof. Suppose first that $U = e_1$. Then $(X, U) = 0$ implies $\xi_1 = 0$ for X as in (10). Hence

$$X = \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + x_{23}.$$

Similarly,

$$Y = \nu_2 e_2 + \nu_3 e_3 + y_{23}.$$

Then

$$X \times Y = \tfrac{1}{2}[(X + Y) \times (X + Y) - X \times X - Y \times Y] = \tfrac{1}{2}(X + Y) \times (X + Y).$$

Moreover, $X + Y$ has the form $\xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + z_{23}$. The usual method of forming the adjoint of a matrix show that the adjoint $(X + Y) \times (X + Y)$ of $X + Y$ is a multiple of $e_1 = U$. Now let U be arbitrary and let η be an element of $\widetilde{L}_R$ such that $U^\eta = \mu e_1$. Then we have

$$(X^{(\eta^*)^{-1}}, U^\eta) = 0 = (Y^{(\eta^*)^{-1}}, U^\eta).$$

Hence $X^{(\eta^*)^{-1}} \times Y^{(\eta^*)^{-1}}$ is a multiple of U^η. Then

$$X \times Y = (X^{(\eta^*)^{-1}} \times Y^{(\eta^*)^{-1}})^{\eta^{-1}}$$

is a multiple of U.

We now introduce the Freudenthal-Springer version of the Cayley plane $\mathfrak{P}$. The points and the lines of $\mathfrak{P}$ are the rays $\{X\}$, $\{U\}$ of non-zero Φ-multiples of elements $X, U \in \Pi$. The point $\{X\}$ and the line $\{U\}$ are *incident* if and only if $(X, U) = 0$. We now check the axioms for a projective plane:

Any two distinct points lie on one and only one line. Any two distinct lines meet in one and only one point.

Proof. Let $\{X\}$, $\{Y\}$ be distinct points. Then $X, Y \in \Pi$ and these are linearly independent. Hence $U = X \times Y \in \Pi$ and $(U, X) = 0 = (U, Y)$. Hence $\{U\}$ is a line containing $\{X\}$ and $\{Y\}$. If $\{V\}$ is any line through $\{X\}$ and $\{Y\}$ then $(X, V) = 0 = (Y, V)$. Hence $\{V\} = \{X \times Y\} = \{U\}$. The same argument applies to lines.

A projective mapping (or collineation) of $\mathfrak{P}$ is a $1-1$ mapping of the set π of points onto itself (bijection) together with a $1-1$ mapping of the set λ of lines onto itself such that $\{X\}$ and $\{U\}$ are incident if and only if their images are incident. The mapping induced in π and its inverse preserve collinearity. Conversely, if we have a $1-1$ mapping of π onto itself such that it and its inverse preserve collinearity then this defines a unique projective transformation of $\mathfrak{P}$.

Let $\eta \in L(\mathfrak{J})$. Then we have seen that η induces a $1-1$ mapping of Π onto Π; hence of π onto π. Also $(\eta^*)^{-1}$ does the same thing for λ. We have $(X^\eta, U^{(\eta^*)^{-1}}) = (X, U)$ which means that $\{X\}$ and $\{U\}$ are incident if and only if $\{X^\eta\}$, $\{U^{(\eta^*)^{-1}}\}$ are incident. We therefore obtain a projective transformation $\{\eta\}$ of $\mathfrak{P}$ defined by $\{X\} \to \{X^\eta\}$, $\{U\} \to \{U^{(\eta^*)^{-1}}\}$. The mapping $\eta \to \{\eta\}$ is a homomorphism of $L(\mathfrak{J})$ into the projective group. The kernel is the set of scalar multiplications $A \to \varrho A$ where $\varrho^3 = 1$; for we have

Proposition 8. *If $\eta \in L(\mathfrak{J})$, $\{\eta\} = 1$ if and only if η is a scalar multiplication by an element ϱ such that $\varrho^3 = 1$.*

Proof. Assume $\{\eta\} = 1$, that is, $X^\eta = \varrho(X)\, X$ for $X \in \Pi$. Let X_1, X_2 be distinct points and let $X_i^\eta = \varrho_i X_i$. Let Y be any point not collinear with the X_i. Then if $Y^\eta = \varrho Y$,

$$(X_1, X_2, Y) = (X_1^\eta, X_2^\eta, Y^\eta)$$

implies $\varrho\varrho_1\varrho_2 = 1$ so that $\varrho = (\varrho_1\varrho_2)^{-1}$. Hence

$$Y^\eta = (\varrho_1\varrho_2)^{-1}\, Y$$

holds for every $\{Y\}$ not on the line $\{U\}$ through $\{X_1\}$, $\{X_2\}$. Now let $\{Z\}$ be on $\{U\}$. Choose $\{Y_1\}$, $\{Y_2\}$ not on $\{U\}$ and not collinear with $\{Z\}$. Then the argument just used shows that

$$Z^\eta = \varrho^{-2} Z, \quad \varrho = (\varrho_1\varrho_2)^{-1}.$$

In particular,

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho^{-2} = (\varrho_1\varrho_2)^2.$$

Hence $\varrho = (\varrho_1\varrho_2)^{-1} = \varrho^4$, $\varrho^3 = 1$ and $\varrho = \varrho^{-2}$. It follows that $X^\eta = \varrho X$ for all $X \in \Pi$. Since the space spanned by the primitive idempotents is all of $\mathfrak{J}$ (cf. the proof of Theorem 8), $A^\eta = \varrho A$ for every $A \in \mathfrak{J}$. The condition $\varrho^3 = 1$ follows from $N(A^\eta) = N(A)$.

7. Elations.

A projective transformation $\tau \neq 1$ of $\mathfrak{P}$ will be called an *elation* if it leaves every point on some line $\{U_0\}$ fixed and every line through some point $\{X_0\}$ on $\{U_0\}$ fixed. It is immediate that $\{X_0\}$ and $\{U_0\}$ are uniquely determined. These will be called the *center* and *axis* respectively of τ. The following result is well known.

Proposition 9. *An elation τ is completely determined by its center, its axis, any point $\{X\}$ not on the axis and the image $\{X'\}$ of $\{X\}$.*

Proof. Let $\{Y\}$ be a point $\neq \{X\}$ and not on the axis $\{U_0\}$. Assume first that $\{Y\}$ is not on the line $\{X\}\ \{X_0\}$ $(=$ line $\{X'\}\ \{X_0\})$. Let $\{Z\}$ be the intersection of $\{X\}\ \{Y\}$ with $\{U_0\}$. Then $\{Z\} \neq \{X_0\}$ since $\{Y\}$ is not on $\{X\}\ \{X_0\}$. Hence the lines $\{Y\}\ \{X_0\}$ and $\{Z\}\ \{X'\}$ are distinct and so have a unique point of intersection. We assert that this is the image $\{Y'\}$ of $\{Y\}$. Thus $\{Y'\}$ is on $\{Y\}\ \{X_0\}$ since this line is fixed under τ. Since $\{Z\}$ is a fixed point and $\{X\}$ is mapped into $\{X'\}$, line $\{X\}\ \{Z\}$ is mapped into $\{X'\}\ \{Z\}$. Since $\{X\}\ \{Z\}$ contains $\{Y\}$, $\{X'\}\ \{Z\}$ contains $\{Y'\}$. Hence $\{Y'\}$ is on $\{X'\}\ \{Z\}$ and on $\{Y\}\ \{X_0\}$ so that $\{Y'\}$ is determined. Next let $\{Y\}$ be on the line $\{X\}\ \{X_0\}$. In this case we take $\{Z\}$ not on $\{X\}\ \{X_0\}$, find the image $\{Z'\}$ and then argue that $\{Y'\}$ is determined by $\{Z\}$ and $\{Z'\}$ as before.

Proposition 10. *If R is a particular representation of $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ and p_{ij} is defined as before then $\{p_{ij}\}$ is an elation with center $\{e_i\}$ and axis $\{e_j\}$. Moreover, every elation with this center and axis can be obtained in this way.*

Proof. The points on the line $\{e_j\}$ are the $\{X\}$ such that $(X, e_j) = 0$. This implies $\xi_j = 0$ in (10) so that X has the form $\varrho e_i + \sigma e_k + x_{ki}$, i, j, k different. Then (48) implies that $X^{p_{ij}} = X$. We have seen that

$$p_{ij}^* = \overline{\gamma_j^{-1}\gamma_i p_{ji}}$$

so that

$$(p_{ij}^*)^{-1} = -\overline{\gamma_j^{-1}\gamma_i p_{ji}}.$$

The argument just used shows that $\{p_{ij}\}$ leaves fixed every line through the point $\{e_i\}$. The point $\{e_j\}$ is not on the line $\{e_j\}$ and its image under an elation with center $\{e_i\}$ and axis $\{e_j\}$ is a point $\neq \{e_i\}$ on the line $\{e_j\}\ \{e_i\}$, that is, on the line $\{e_k\}$. Such a point has the form

$$\{e_j + \gamma_j^{-1}\gamma_i N(p)\, e_i + p_{ij}\}$$

and this, by (48), is the image of e_j under p_{ij}.

Let τ be an elation with center $\{X_0\}$, axis $\{U_0\}$ and let σ be an arbitrary projective transformation. Then it is clear from the definition that $\sigma^{-1}\tau\sigma$ is an elation with center $\{X_0\}^\sigma$ and axis $\{U_0\}^\sigma$. We wish to show that the group induced in $\mathfrak{P}$ by the elements of $\widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$ is precisely the group generated by the elations. To prove this it will be sufficient to show that given any line and point on it and any other line and point on it then there exists a $\sigma = \{\eta\}$ induced by an $\eta \in \widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$ such that σ maps the first line on the second and the first point on the second. For we could then take the first pair to be the axis and center of a given elation τ and the second pair to be the line $\{e_2\}$ and the point $\{e_1\}$. Then $\sigma^{-1}\tau\sigma$ is an elation with center $\{e_1\}$ and axis $\{e_2\}$. Hence, by Propositions 9 and 10, $\sigma^{-1}\tau\sigma$ has the form $\{p_{12}\}$. Since σ is induced by an element of $\widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$ it will follow that τ has this property.

Proposition 11. *Let $\{X\}$ be a point not on the line $\{e_1\}$. Then there exists a $\sigma = \{\eta\}$, $\eta \in \widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$, such that $\{e_2\}^\sigma = \{e_2\}$, $\{e_3\}^\sigma = \{e_3\}$ for the points $\{e_2\}$, $\{e_3\}$ and $\{X\}^\sigma = \{e_1\}$.*

Proof. Let $\{X\}$ be as in (10). We have $\xi_1 \neq 0$ since $\{X\}$ is not on the line $\{e_1\}$. It follows from (48) that p can be chosen so that the component of $X^{p_{21}}$ in the Peirce space $\mathfrak{J}_{12}$ is 0. Also, by (48), $e_2^{p_{21}} = e_2$ and $e_3^{p_{21}} = e_3$. Hence we may assume $\xi_1 \neq 0$, $x = 0$ for the element X. Then (48) shows that the $\mathfrak{J}_{12}$-component of $X^{q_{21}}$ is 0 for every q. Moreover, q can be chosen so that the $\mathfrak{J}_{13}$-component of $X^{q_{21}}$ is 0. Also we have $e_3^{q_{21}} = e_3$, $e_2^{q_{21}} = e_2$. Hence we may assume $\xi_1 \neq 0$, $x = 0 = z$ in X. Then the conditions (51) imply that $\xi_2 = \xi_3 = y = 0$. Then $\{X\} = \{e_1\}$ as required.

Proposition 12. *Let $\{X_i\}$, $i = 1, 2$, be points, $\{U_i\}$ lines such that $\{X_i\}$ is not on $\{U_i\}$. Then there exists a $\sigma = \{\eta\}$, $\eta \in \widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$, such that $\{X_1\}^\sigma = \{X_2\}$, $\{U_1\}^\sigma = \{U_2\}$.*

Proof. We have seen that the group in $\mathfrak{P}$ induced by $\widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$ is transitive on the set π of points of $\mathfrak{P}$ (Proposition 5). Since $\widetilde{L}_R$ is mapped into itself by the contragredient mapping we have transitivity also on the set λ of lines. Hence we may assume $\{U_1\} = \{U_2\} = \{e_1\}$ and it is enough to prove that if $\{X\}$ is any point not on $\{e_1\}$ then there exists a $\sigma = \{\eta\}$, $\eta \in \widetilde{L}_R$, such that σ maps the line $\{e_1\}$ onto itself and maps $\{X\}$ into the point $\{e_1\}$. This has been proved in Proposition 11.

Proposition 13. *Let $\{X_i\}$, $\{Y_i\}$, $i = 1, 2, 3$, be points such that the $\{X_i\}$ are not collinear and the $\{Y_i\}$ are not collinear. Then there exists a $\sigma = \{\eta\}$, $\eta \in \widetilde{L}_R(J)$, such that $\{X_i\}^\sigma = \{Y_i\}$, $i = 1, 2, 3$.*

Proof. We may assume $\{X_i\} = \{e_i\}$. Also, using Proposition 5, we may assume $\{Y_1\} = \{e_1\}$. Since $\{Y_2\} \neq \{Y_1\}$, $\{Y_2\}$ cannot be on both the lines $\{e_2\}$ and $\{e_3\}$. If $\{Y_2\}$ is not on line $\{e_2\}$, by Proposition 11, we can find a $\sigma = \{\eta\}$, $\eta \in \widetilde{L}_R$, such that $\{Y_2\}^\sigma = \{e_2\}$, $\{e_1\}^\sigma = \{e_1\}$, $\{e_3\}^\sigma = \{e_3\}$. In the second case there is a $\sigma = \{\eta\}$, $\eta \in \widetilde{L}_R$, $\{Y_2\}^\sigma = \{e_3\}$, $\{e_1\}^\sigma = \{e_1\}$, $\{e_2\}^\sigma = \{e_2\}$. The argument used in the proof of Proposition 5 shows that there is a $\tau = \{\zeta\}$, $\zeta \in \widetilde{L}_R$, such that $\{e_1\}^\tau = \{e_1\}$, $\{e_2\}^\tau = \{e_3\}$, $\{e_3\}^\tau = \{e_2\}$. If we take the resultant of this transformation and the last one the situation is reduced to the previous case. Hence we may assume $\{Y_1\} = \{e_1\}$ and $\{Y_2\} = \{e_2\}$. Then $\{Y_3\}$ is not on the line $\{e_3\}$ and we can find a $\sigma = \{\eta\}$, $\eta \in \widetilde{L}_R$, such that $\{Y_3\}^\sigma = \{e_3\}$, $\{e_1\}^\sigma = \{e_1\}$, $\{e_2\}^\sigma = \{e_2\}$ (Proposition 11).

Proposition 14. *Given two lines $\{U_i\}$, $i = 1, 2$, and points $\{X_i\}$ on $\{U_i\}$ there exists a $\sigma = \{\eta\}$, $\eta \in \widetilde{L}_R$, such that $\{X_1\}^\sigma = \{X_2\}$, $\{U_1\}^\sigma = \{U_2\}$.*

Proof. Choose points $\{Y_1\}$, $\{Z_1\}$, $\{Y_2\}$, $\{Z_2\}$ such that $\{X_i\}$, $\{Y_i\}$, $\{Z_i\}$, $i = 1, 2$, are not collinear and $\{Y_i\}$ is on $\{U_i\}$. By the last result there is a $\sigma = \{\eta\}$, $\eta \in \widetilde{L}_R$, such that $\{X_1\}^\sigma = \{X_2\}$, $\{Y_1\}^\sigma = \{Y_2\}$, $\{Z_1\}^\sigma = \{Z_2\}$. Then $\{U_1\}^\sigma = \{U_2\}$ as required.

As we have noted before this result implies that any elation is induced by a suitable element $\eta \in \widetilde{L}_R$. Also we know that the generators p_{ij} of $\widetilde{L}_R$ induce elations in $\mathfrak{P}$. We have therefore proved the first statement of the following

Theorem 11. *The group induced in $\mathfrak{P}$ by the elements of $\widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$ determined by a particular isomorphism R of $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ is the group generated by the elations of $\mathfrak{P}$. The latter group is invariant in the group of projective transformations of $\mathfrak{P}$. If R_i, $i = 1, 2$, are isomorphisms of $\mathfrak{J}$ onto $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma_i)$ then $\widetilde{L}_{R_1} = \widetilde{L}_{R_2}$.*

Proof. The second statement is clear since the conjugate of an elation by a projective transformation is an elation. To prove the last statement, let $\eta_1 \in \widetilde{L}_{R_1}$ and let $\sigma = \{\eta_1\}$. Then there exists an $\eta_2 \in \widetilde{L}_{R_2}$ such that $\{\eta_2\} = \{\eta_1\}$. Then η_1 is a product of η_2 and a scalar multiplication by ϱ such that $\varrho^3 = 1$. The latter transformation belongs to $\widetilde{L}_{R_2}$ by Proposition 2. Hence $\eta_1 \in \widetilde{L}_{R_2}$ and $\widetilde{L}_{R_1} \leq \widetilde{L}_{R_2}$. By symmetry, $\widetilde{L}_{R_1} = \widetilde{L}_{R_2}$.

Whe shall now write $\widetilde{L}(\mathfrak{J})$ for $\widetilde{L}_R(\mathfrak{J})$ since this subgroup of $L(\mathfrak{J})$ is independent of the representation.

8. $L(\mathfrak{J}) = \widetilde{L}(\mathfrak{J})$.

Proposition 15. *$L(\mathfrak{J})$ contains the subgroup $G(\mathfrak{J}/\Phi e_1)$ of the group of automorphisms of $\mathfrak{J}$ leaving fixed the idempotent e_1.*

Proof. Let $x = \xi(e_2 - e_3) + c_{23}$, c in $\mathfrak{C}$, $(x, x) = \xi^2 - \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(c)$, $\theta(x) = e_1 + x$. Then $N(\theta(x)) = -(x, x)$. We have shown in II (p. 90) that if $\eta \in G(\mathfrak{J}/e_1)$ then η has the form $U_{\theta(x_1)} U_{\theta(x_2)} \cdots U_{\theta(x_{2r})}$ where $x_i = \xi_i(e_2 - e_3) + c_{23}^{(i)}$ and $\prod_1^{2r} (x_i, x_i) = 1$. Let D be an element of $\mathfrak{J}$ whose entries belong to a quadratic subfield P of C. Then the associativity relations (45) imply that $XU_D = DXD = DXD^*$. If $D_i \in \mathfrak{J}$, $i = 1, 2, \cdots k$, and the entries of D_i are in P, then $XU_{D_1} U_{D_2} \cdots U_{D_k} = D_k(\cdots(D_1 X D_1)\cdots) D_k = DXD^*$ where $D = D_k D_{k-1} \cdots D_1$. If $\prod N(D_i) = 1$ then D is unimodular; hence $X \to DXD^*$ is in $L(\mathfrak{J})$. For $\beta \in \Phi$, let $L_\beta = \operatorname{diag}\{1, 1, \beta\}$. Then

$$U_{\theta(x_1)} U_{\theta(x_2)} = (U_{\theta(x_1)} U_{L_{\beta_1}})(U_{L_{\beta_1^{-1}}} U_{\theta(x_2)} U_{L_{\beta_2}}) U_{L_{\beta_2^{-1}}}$$

where $\beta_1 = -(x_1, x_1)^{-1}$, $\beta_2 = -\beta_1(x_2, x_2)^{-1}$ insures that $U_{\theta(x_1)} U_{L_{\beta_1}}$ and $U_{L_{\beta_1^{-1}}} U_{\theta(x_2)} U_{L_{\beta_2}}$ are in $L(\mathfrak{J})$. If we continue this type of factorization and we use the fact that $\prod_1^{2r} (x_i, x_i) = 1$ we see that $\eta = U_{\theta(x_1)} \cdots U_{\theta(x_{2r})}$ is in $L(\mathfrak{J})$.

Proposition 16. *Let P be a quadratic subfield of $\mathfrak{C}$ and let U be a matrix with elements in P such that $N(\det U) = 1$. Then if $X \in \mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathsf{P}_3, \gamma)$ then $X \to UXU^*$ is in $L(\mathfrak{K})$ and this mapping can be extended to an element $\eta \in \tilde{L}(\mathfrak{J})$.*

Proof. If $X \in \mathfrak{K}$ then

$$N(UXU^*) = \det(UXU^*) = \det U \det U^* \det X = N(\det U) \det X = \det X.$$

Hence $X \to UXU^*$ is in $L(\mathfrak{K})$. Now let $\mu = \det U \in \mathsf{P}$. Then $\det(\operatorname{diag}\{1, 1, \mu\}) = \mu$. Hence if $V = U \operatorname{diag}\{1, 1, \mu\}^{-1}$ then $\det V = 1$ and $X \to VXV^*$, $X \in \mathfrak{J}$, is in $\tilde{L}(\mathfrak{J})$ by Proposition 4. It therefore suffices to show that

$$X \to \operatorname{diag}\{1, 1, \mu\}\, X\, \{\operatorname{diag} 1, 1, \mu\}^*$$

can be extended to an element of $\tilde{L}(\mathfrak{J})$. Since $N(\mu) = 1$, $\operatorname{diag}\{1, 1, \mu\}$ is γ-unitary and the mapping is an automorphism of $\mathfrak{K}$. It is known that any automorphism of $\mathfrak{K}$ can be extended to an automorphism of $\mathfrak{J}$ (Albert-Jacobson [1], page 412). This extension maps e_1 into itself, so it is in $\tilde{L}(\mathfrak{J})$ by Proposition 15.

Proposition 17. *Let $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ and let $\mathfrak{L}$ be the subalgebra $\mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$. Suppose η is an element of $L(\mathfrak{J})$ such that $e_i^\eta \in \mathfrak{L}$, $i = 1, 2, 3$ and $A^\eta \in \mathfrak{L}$ for some element $A \in \Pi \cap \mathfrak{L}$ such that $(A, e_i, e_j) \neq 0$, $i \neq j = 1, 2, 3$. Then $\mathfrak{L}^\eta \subseteq \mathfrak{L}$.*

Proof. The definition (23) of $X \times Y$ gives

$$2e_i \times e_j = e_k \tag{54}$$

if i, j, k are unequal and

$$X \times 2 = T(X)\,1 - X. \tag{55}$$

The first of these and the conditions $(A, e_i, e_j) \neq 0$ give $(A, e_k) \neq 0$ for all k. This means that the diagonal entries of A are not zero. Since $A \in \Pi$ this implies that all the entries of A are non-zero. Formula (53) then shows that the elements e_i, $e_i \times A$, $i = 1, 2, 3$ form a basis for $\mathfrak{L}$. It therefore suffices to prove that $(e_i \times A)^\eta \in \mathfrak{L}$ for all i. Since

$$(e_i \times A)^\eta = e_i^{(\eta^*)^{-1}} \times A^{(\eta^*)^{-1}}$$

it suffices to show that

$$e_i^{(\eta^*)^{-1}}, \quad A^{(\eta^*)^{-1}} \in \mathfrak{L}.$$

The first is clear since

$$e_i^{(\eta^*)^{-1}} = (2e_j \times e_k)^{(\eta^*)^{-1}} = 2e_j^\eta \times e_k^\eta$$

and the second holds since we now have

$$1^{(\eta^*)^{-1}} = (\Sigma\, e_i)^{(\eta^*)^{-1}} \in \mathfrak{L}$$

and $A = T(A)\,1 - A \times 2$ so that

$$A^{(\eta^*)^{-1}} = T(A)\,1^{(\eta^*)^{-1}} - A^\eta \times 2^\eta \in \mathfrak{L}.$$

We are now ready to prove the following

Theorem 12. $\widetilde{L}(\mathfrak{J}) = L(\mathfrak{J})$.

Proof. Let $\eta \in L(\mathfrak{J})$. We can use Proposition 13 to show that η can be multiplied by a suitable element of $\widetilde{L}$ to obtain η' such that $e_i^{\eta'} = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2, 3$ where the e_i are the diagonal idempotents. If we replace η by η' we may suppose that $e^\eta = \lambda_i e_i$. Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma_2^{-1}\gamma_1 & \gamma_2^{-1}\gamma_1 & \gamma_2^{-1}\gamma_1 \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1 & \gamma_3^{-1}\gamma_1 & \gamma_3^{-1}\gamma_1 \end{pmatrix} \tag{56}$$

which belongs to Π. Also the four points $\{e_i\}$, $\{A\}$ are independent in the sense that no three of them are collinear. This condition carries over to $\{e_i\}$, $\{A^\eta\}$ so that we see that all the entries of A^η are not zero. Let p be any non-zero element of $\mathfrak{C}$. Then p is contained in a quadratic subfield of $\mathfrak{C}$ and $P = \operatorname{diag}\{p, p^{-1}, 1\}$ is unimodular. It follows that $\zeta : X \to PXP^*$ is in $\widetilde{L}(\mathfrak{J})$. For a suitable choice of p we can arrange that $A^{\eta\zeta}$ has the entry $z = \gamma_3^{-1}\gamma_1$ in (10). Also, $e_i^\zeta = \varrho_i e_i$. Hence if we replace η by $\eta\zeta$ we may assume that $e_i^\eta = \lambda_i e_i$ and

$$B = A^\eta = \begin{pmatrix} \xi & x & 1 \\ \gamma_2^{-1}\gamma_1\bar{x} & * & * \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1 & * & * \end{pmatrix}, \quad x \neq 0. \tag{57}$$

The condition that B has rank one implies that all the entries of B can be imbedded in a quadratic subfield P of $\mathfrak{C}$. Let $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathsf{P}_3, \gamma)$. Now let a, b, c be any three elements of $\mathfrak{K}$ such that $N(abc) = 1$. Then if $Q = \operatorname{diag}\{a, b, c\}$, Proposition 16 shows that the mapping $X \to QXQ^*$, $X \in \mathfrak{K}$, is in $L(\mathfrak{K})$ and this mapping can be extended to an element $\zeta \in \widetilde{L}(\mathfrak{J})$. We have

$$B^\zeta = C = \begin{pmatrix} \xi N(a) & a\bar{b}x & a\bar{c} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \tag{58}$$

We now choose $a = x^{-1}$, $b = 1$, $c = \bar{x}$. Then $N(abc) = 1$ and the first line of C is $(\xi N(x)^{-1}, 1, 1)$. It follows that $C \in H(\Phi_3, \gamma)$. We can therefore replace η by $\eta\zeta$ and by a change of notation we may assume at the outset that

$$e_i^\eta = \lambda_i e_i, \quad A^\eta \in H(\Phi_3, \gamma)$$

for A as in (56). Then, by Proposition 17,

$$\mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)^\eta \subseteq \mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$$

so that η induces in $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$ an element of $L(L)$. This has the form $X \to \varrho MXM^*$ where $\varrho^3(\det M)^2 = 1$ (I, page 193). This condition implies that ϱ is a square; hence ϱ may be suppressed so that we may assume the mapping is $X \to MXM^*$, $(\det M)^2 = 1$. Also replacing M by $-M$, if necessary, enables one to assume that $\det M = 1$. Then $\zeta : X \to MXM^*$, $X \in \mathfrak{J}$, is in $\widetilde{L}(\mathfrak{J})$ and $X^\eta = X^\zeta$ for all $X \in \mathfrak{L}$. If we replace η by $\eta\zeta^{-1}$ and change notation again, we may assume $X^\eta = X$ for $X \in L$. Then η is an automorphism leaving e_1 fixed and so is in $\widetilde{L}(\mathfrak{J})$ by Proposition 15. This completes the proof that $\widetilde{L} = L$.

9. Structure of $L(\mathfrak{J})$ for $\mathfrak{J}$ non-split.

It is usual to call the group generated by the elations of a projective plane the *little projective group* of the plane. Theorem 12 and Proposition 8 imply that the little projective group of the Cayley plane P is isomorphic to $L(\mathfrak{J})/C$ where C is the set of scalars $\varrho 1$ such that $\varrho^3 = 1$. We can now prove

Theorem 13. *Let $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ where $\mathfrak{C}$ is a Cayley division algebra. Then $L(\mathfrak{J})/C$, C the set of scalars $\varrho 1$, $\varrho^3 = 1$, is a simple group. Equivalently, the little projective group of any Cayley plane $\mathfrak{P}$ is simple.*

Proof. We shall prove the result in its geometric form. Thus let Λ denote the little projective group of a Cayley plane $\mathfrak{P}$ and let Λ_1 be an invariant subgroup of Λ, $\Lambda_1 \neq 1$. We show first that any two elations are conjugate in Λ. Hence to prove $\Lambda = \Lambda_1$ it will suffice to show that Λ_1 contains an elation. We have seen that the set of elations with a given center and axis is conjugate to the set with any other center and axis. Hence it is enough to show that any two elations with center $\{e_2\}$ and axis $\{e_3\}$ are conjugate. Such an elation is completely determined by the image $\{Y\}$ of the point $\{e_3\}$, which is not on the axis. Also it is clear that $\{Y\}$ is on the line $\{e_1\}$ and $\{Y\} \neq \{e_2\}, \{e_3\}$. Hence we may take

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(y) & y \\ 0 & \gamma_3^{-1}\gamma_2 \bar{y} & 1 \end{pmatrix}, \quad y \neq 0. \tag{59}$$

Set $P = \operatorname{diag}\{p, p^{-1}, 1\}$. Then $\zeta : X \to PXP^*$ is in $L(\mathfrak{J})$ and

$$Y^\zeta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(yp^{-1}) & p^{-1}y \\ 0 & \gamma_3^{-1}\gamma_2 \bar{y}\bar{p}^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

A suitable choice of p in $\mathfrak{C}$ makes $\{Y^\zeta\} = \{Z\}$ where this is any given point $\neq \{e_2\} \neq \{e_3\}$ on the line $\{e_1\}$. Also $\sigma = \{\zeta\}$ maps the point $\{e_i\}$ into $\{e_i\}$, $i = 1, 2, 3$. It follows that if τ is the elation with center $\{e_2\}$ and axis $\{e_3\}$ mapping the point $\{e_3\}$ into $\{Y\}$ then $\sigma^{-1}\tau\sigma$ is the elation with the same center and axis mapping the point $\{e_3\}$ on $\{Z\}$. This implies that elations with the same center and axis are conjugate.

Now let σ be an element $\neq 1$ in the invariant subgroup Λ_1 and let $\{P\}$ be a point such that $\{P\}^\sigma \neq \{P\}$. Let τ be an elation with center $\{C\} = \{P\}^\sigma$ and axis the line l joining $\{P\}$ and $\{C\}$. Then $\omega = \sigma(\tau\sigma^{-1}\tau^{-1})$ is in Λ_1 and $\omega = (\sigma\tau\sigma^{-1})\,\tau^{-1}$ is a product of the elations $\sigma\tau\sigma^{-1}$ and τ^{-1}. The first of these has center $\{P\}$ and the second has center $\{C\} \neq \{P\}$. Hence $\omega \neq 1$. Also both $\sigma\tau\sigma^{-1}$ and τ^{-1} leave the line l fixed. Hence l is fixed under ω. If, in addition, l is fixed under σ and $\{Q\}$ is on l then

$$\{Q\}^\omega = \{Q\}^{\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}} = \{Q\}^{\sigma\sigma^{-1}\tau^{-1}} = \{Q\}^{\tau^{-1}} = \{Q\}.$$

These results imply that Λ_1 contains an element $\sigma \neq 1$ which leaves every point on a line l fixed. If σ is an elation then $\Lambda_1 = \Lambda$. Otherwise, it is easy to see that σ has a fixed point $\{F\}$ not on l. Also $\{F\}$ is the only such fixed point. Let τ be an elation with l as axis. Then $\{F\}^\tau \neq \{F\}$ so $\{F\}^{\tau\sigma} \neq \{F\}^\tau = \{F\}^{\sigma\tau}$. Hence $\omega = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1} \neq 1$. This is a product of the elations $\sigma\tau\sigma^{-1}$ and τ^{-1} which have the same center and axis. Hence ω is an elation belonging to Λ_1 and so $\Lambda_1 = \Lambda$.

10. Irreducibility.

We have proved in II that the only invariant subspaces of $\mathfrak{J}$ relative to the action of $G(\mathfrak{J})$ are: 0, $\Phi 1$, $\mathfrak{J}'$, the set of elements of trace 0, and $\mathfrak{J}$. We use this to prove

Theorem 14. *$L(\mathfrak{J})$ is an irreducible set of linear transformations in $\mathfrak{J}$.*

Proof. Let $\mathfrak{M}$ be a non-zero subspace invariant relative to $L(\mathfrak{J})$. We wish to show that $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}$. Since $L(\mathfrak{J}) \geqq G(\mathfrak{J})$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}$ will follow from the quoted result on $G(\mathfrak{J})$ by showing that $\mathfrak{M}$ contains an element A such that $A \notin \Phi 1$ and $T(A) \neq 0$. Also we may assume that either $\mathfrak{M} \geqq \Phi 1$ or $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{J}'$. In the first case we take $M = \operatorname{diag}\{1, \mu, \mu^{-1}\}$ where $\mu \neq 0, 1, -1$. Then $\eta : X \to MXM^*$ is in $L(\mathfrak{J})$ and

$$B = 1^\eta = \operatorname{diag}\{1, \mu^2, \mu^{-2}\} \in \mathfrak{M}, \notin \Phi 1.$$

We can subtract a scalar from this to obtain $A \in \mathfrak{M}$ such that $A \notin \Phi 1$, $T(A) \neq 0$. If $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{J}'$ we apply η to $C = \operatorname{diag}\{1, -1, 0\}$ to obtain the required

$$A = C^\eta = \operatorname{diag}\{1, -\mu^2, 0\}.$$

Bibliography.

[1] *A. A. Albert* and *N. Jacobson*, Reduced exceptional simple Jordan algebras, Annals of Math., **67** (1957), 400—417.

[2] *E. Artin*, Geometric Algebra, New York 1957.

[3] *N. Bourbaki*, Éléments de Mathématique, Livre II, Algèbre. Paris 1950.

[4] *C. Chevalley*, Sur certains groupes simples, Tohoku Math. J. **7** (1955), 14—66.

[5] *H. Freudenthal*, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Utrecht 1951. Also Russian translation of a revision of this in Mathematica **1** (1957).

[6] *H. Freudenthal*, Zur ebenen Oktavengeometrie, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **15** (1953), 195—200.

[7] *G. Frobenius*, Sitzungsberichte Preuß. Akad., 1897, 994—1015.

[8] *N. Jacobson*, Some groups of transformations defined by Jordan algebras. I and II, this journal I: **201** (1959) 178—195, II: **42** (1960), 74—98.

[9] *N. Jacobson*, Composition algebras and their automorphisms, Rend. Cir. Mat. di Palermo (II) **7** (1958), 55—80.

[10] *N. Jacobson*, Nilpotent elements in semi-simple Jordan algebras, Math. Annalen, **136** (1958), 375—386.

[11] *P. Jordan*, Nicht-Desarguessche ebene projektive Geometrie, Hamb. Abhandl., **16** (1949), 74—76.

[12] *T. A. Springer*, The projective octave plane. I and II, Indagationes Mathematicae **22** (1960), 74—88 and 89—101.

[13] *O. Taussky* and *H. Zassenhaus*, On the similarity transformation between a matrix and its transpose, Pacific Journ. of Math. **9** (1959), 893—896.

Eingegangen 5. Mai 1960.

Stetige Funktionen auf dem Torus.

Von *Wolfgang Schmidt* in Wien.

Einleitung.

Ist $f(x)$ eine stetige reelle Funktion der reellen Veränderlichen x mit Periode 1, $f(x+1) = f(x)$, dann folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz eines x^* mit $f(x^* + \frac{1}{2}) = f(x^*)$. In dieser Arbeit werden Verallgemeinerungen dieser Tatsache hergeleitet.

Als n-Torus T_n bezeichnen wir die Menge der n-tupel $x = (x_1, \ldots, x_n)$, deren Komponenten x_i reelle Zahlen modulo 1 sind. Sei τ_i $(i = 1, \ldots, n)$ die Involution auf T_n, welche durch

$$\tau_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \tfrac{1}{2}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

gegeben ist.

Satz 1. *Seien $f_1, \ldots, f_n$ stetige Funktionen auf T_n, und zwar sei noch*

$$f_j(\tau_i x) = f_j(x) \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n).$$

Dann existiert ein x^*, so daß

$$f_j(\tau_i x^*) = f_j(x^*) \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

ist.

Ist $W(x)$ der „Würfel" mit den Eckpunkten $\tau_1^{a_1} \tau_2^{a_2} \cdots \tau_n^{a_n} x$, so nimmt daher f_j an den 2^n Eckpunkten von $W(x^*)$ denselben Wert an.

Anwendungen. Sei $W_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ der $(n-1)$-dimensionale Seitenwürfel von $W(x)$ mit den Eckpunkten $\tau_1^{a_1} \cdots \tau_{i-1}^{a_{i-1}} \tau_{i+1}^{a_{i+1}} \cdots \tau_n^{a_n} x$. Sei $f(x)$ stetig auf T_n und seien n stetige, symmetrische Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ in 2^{n-1} Variablen gegeben. Wir bilden $f_j(x) = g_j(f(x^{(1)}), f(x^{(2)}), \ldots)$, wobei die $x^{(k)}$ die Eckpunkte von $W_j(x)$ durchlaufen. Dann folgt nach Satz 1 die Existenz eines x^* mit $f_j(\tau_i x^*) = f_j(x^*)$.

Nimmt man für g_j etwa die Summe, dann gibt es einen Würfel $W(x^*)$, so daß die Summe der Werte von $f(x)$, erstreckt über die Eckpunkte eines $(n-1)$-dimensionalen Seitenwürfels von $W(x^*)$, gleich der entsprechenden Summe über den dazu parallelen Seitenwürfel ist.

Oder wir setzen $g_j(y_1, \ldots, y_{2^{n-1}}) = y_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, wobei $i_1, i_2, \ldots, i_{2^{n-1}}$ eine Anordnung von $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ ist, für die

$$y_{i_1} \leqq y_{i_2} \leqq \cdots \leqq y_{i_{2^{n-1}}}$$

gilt. Dann folgt die Existenz eines x^*, so daß es unter den Eckpunkten von $W(x^*)$ $2n$ verschiedene gibt, etwa $x^{(1)}, \overline{x}^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \overline{x}^{(n)}$, mit $f(x^{(i)}) = f(\overline{x}^{(i)})$ und mit $f(x^{(i)}) \leqq f(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ für jeden davon verschiedenen Eckpunkt x von $W(x^*)$.

Ist speziell $n = 2$, so wird $g_1(y_1, y_2) = \min(y_1, y_2)$, $g_2(y_1, y_2) = \max(y_1, y_2)$ und es folgt leicht die Existenz eines x^* mit $f(x^*) = f(\tau_1\tau_2 x^*)$ und $f(\tau_1 x^*) = f(\tau_2 x^*)$. f nimmt in „gegenüberliegenden" Eckpunkten des Quadrates $W(x^*)$ denselben Wert an. Ist h stetig auf T_2 und setzt man $f(x_1, x_2) = h(x_1, x_1 + x_2)$, so ergibt sich die Existenz eines x^*, so daß h an den beiden „oberen" und den beiden „unteren" Eckpunkten von $W(x^*)$ jeweils denselben Wert annimmt.

Daß es im allgemeinen kein Quadrat $W(x)$ gibt, an dessen 4 Eckpunkten f denselben Wert annimmt, lehrt das Beispiel

$$k(x_1, x_2) = \sin 2\pi\,(x_1 - \tfrac{1}{5}\sin 2\pi x_2) + \sin 2\pi\,(x_2 - \tfrac{1}{4}).$$

Man gelangt daher zur Frage: *Welche Punktmengen M am T_n haben die Eigenschaft $\mathfrak{E}$, daß es zu jedem stetigen $f(x)$ auf T_n ein x^* gibt, so daß*

$$f(x^* + x)$$

für alle $x \in M$ denselben Wert annimmt? Wir zeigen

Satz 2. *Die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ haben die Mengen, die aus einem Punkt, beliebigen zwei Punkten oder drei Punkten bestehen, welche Eckpunkte eines Würfels $W(x)$ sind. Diese Mengen sind die einzigen mit der Eigenschaft $\mathfrak{E}$.*

Weiter beweisen wir für den T_2: Es gibt gewisse Parallelogramme, an deren Eckpunkten f denselben Wert annimmt. Genauer gilt

Satz 3. *Sei f stetig auf T_2. Sei α eine der Zahlen $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, β beliebig. Dann gibt es y_1, y_2, y_1', so daß*

$$(1) \qquad f(y_1, y_2) = f(y_1 + \alpha, y_2) = f(y_1', y_2 + \beta) = f(y_1' + \alpha, y_2 + \beta)$$

gilt.

Anwendung. Sei M die Menge der Punkte im R_4, deren Koordinaten den Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 &= 1, \\ z_1 z_4 - z_2 z_3 &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Sei g stetig auf M. Dann setzen wir

$$f(x_1, x_2) = g(\cos x_1 \cos(x_1 + x_2),\ \cos x_1 \sin(x_1 + x_2),\ \sin x_1 \cos(x_1 + x_2),\ \sin x_1 \sin(x_1 + x_2)).$$

Dann ist f stetig und doppeltperiodisch mit den Perioden $(\pi, 0)$ und $(0, 2\pi)$. Sei α gleich $\frac{\pi}{3}$ oder $\frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}$. Nach Satz 3 gibt es y_1, y_2, y_1', so daß (1) gilt. Es folgt die Existenz von 4 Punkten $P_1, P_2; P_3, P_4$ auf M, an denen g denselben Wert annimmt, $\sphericalangle(P_1 O P_2) = \alpha$, $\sphericalangle(P_3 O P_4) = \alpha$; und die Ebenen durch O, P_1, P_2 bzw. O, P_3, P_4 schließen den Winkel β ein[1]).

Diese Anwendung ist eine Vertiefung des dreidimensionalen Falles des Satzes von Yamebe-Yujobo über die Sphäre; dort fehlt (2) und es ist $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$. Vermutlich bleibt

[1]) Sind $P(p_1, \ldots, p_4)$ und $Q(\ldots)$ nicht Null, so setzen wir

$$(P, Q) = |\, p_1 q_1 + \cdots + p_4 q_4 \,|\, (p_1^2 + \cdots + p_4^2)^{-\frac{1}{2}} (q_1^2 + \cdots + q_4^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Sind E, F zweidimensionale Ebenen durch 0, so sei $(E, F) = \sup(P, Q)$ über alle $P \in E$, $Q \in F$, $P \neq 0$, $Q \neq 0$. Der Winkel $\sphericalangle(POQ)$ (oder derjenige zwischen E, F) ist der Winkel $0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}$ mit $\cos\gamma = (P, Q)$ (bzw. $= (E, F)$).

Satz 3 richtig, wenn man beliebiges α zuläßt. Eine Verallgemeinerung auf den T_n scheint wünschenswert [2]).

Unsere Sätze sind verwandt mit Sätzen von Borsuk-Ulam [1], Kakutani [2], Yamebe-Yujobo [3], Dyson [4], Yang [6], [7], Floyd [8], Bourguin [9] und Hadwiger [10] über stetige Funktionen auf der Sphäre. Satz 1 wird aus einem allgemeineren Satz 5 über topologische Produkte von Sphären gewonnen, der auch den Satz von Borsuk-Ulam als Spezialfall enthält. Satz 5 ergibt sich mittels einer Verallgemeinerung des Indexbegriffes von Yang. Die Beweise der Sätze 2, 3 erfolgen davon unabhängig.

§ 1. Räume mit Operatoren.

Unter einem *Raum mit Operatoren* verstehen wir einen kompakten Hausdorffraum X und eine Gruppe von Homöomorphismen von X auf sich. Anders ausgedrückt, es gibt einen Hausdorffraum und eine Gruppe G sowie eine Komposition gx für $g \in G$, $x \in X$, so daß gilt:

(i) $$gx \in X;$$

(ii) $$1x = x;$$

(iii) $$g_1(g_2x) = (g_1g_2)x;$$

(iv) die Abbildung $x \to gx$ ist topologisch.

Wir setzen in dieser Arbeit noch voraus, G sei endlich, sowie

(v) $$g_ix \neq g_jx \quad \text{für } x \in X,\ g_i \neq g_j.$$

Wir bezeichnen die Gesamtheit X, G sowie die Komposition mit $(X; G)$. Ein G-Paar $(X, A; G)$ besteht aus einem $(X; G)$ sowie einer G-invarianten abgeschlossenen Teilmenge A von G. Eine Abbildung von $(X, A; G)$ in $(Y, B; G)$ ist eine Abbildung von X auf Y, welche A auf B abbildet und mit G vertauschbar ist. Ein G-Paar $(X, A; G)$ heißt *simplizial*, wenn X ein endlicher Euklidischer Komplex, dessen Simplexe durch die Abbildungen $x \to gx$ permutiert werden, und A ein Teilkomplex ist. $\mathfrak{A}$ sei die Kategorie aller G-Paare und aller Abbildungen derselben, $\mathfrak{A}_1$ die Kategorie der simplizialen G-Paare und deren Abbildungen.

Wir wollen auf $\mathfrak{A}$ eine Homologietheorie konstruieren. Die Koeffizientengruppe sei zunächst beliebig. Die Konstruktion ist analog derjenigen von Yang im Spezialfall $(X, A; Z_2)$, wobei Z_2 die additive Gruppe der Zahlen modulo 2 ist.

Sei $(X, A; G)$ ein *eigentliches* simpliziales G-Paar, das heißt, für eine beliebige Ecke u von X habe der Stern $st(u)$ mit $st(gu)$ keinen Punkt gemeinsam, wenn $g \neq 1$ ist. Ein $g \in G$ bewirkt eine Abbildung der Ketten von (X, A) in sich. Die G-invarianten p-Ketten bilden eine Gruppe $C_p(X, A; G)$.

Hilfssatz 1. *Eine p-Kette c ist G-invariant genau dann, wenn*

$$c = \sum_{g \in G} gd$$

für eine p-Kette d ist.

Beweis. Ist die Kette c von obiger Form, dann ist sie invariant. Es bleibt die Umkehrung zu zeigen. Nach (v) können die orientierten Simplexe ohne Wiederholung in der Gestalt

$$gE_i$$

[2]) Anmerkung bei der Korrektur: Diese Fragen werden in einer vom Verf. bei den Proc. Am. Math. Soc. eingereichten Arbeit „Continuous functions defined on product-spaces" beantwortet.

geschrieben werden, wobei E_i etwa die Simplexe $E_1, \ldots, E_l$ und g ganz G durchläuft. Sei etwa

$$c = \sum \sum \gamma_{ig} g E_i,$$

so folgen aus $g_1^{-1} c = c$ die Relationen

$$\gamma_{ig_1 g} = \gamma_{ig},$$

und daraus $\gamma_{ig} = \gamma_i$. Somit gilt

$$c = \sum_{g \in G} (\sum_i \gamma_i E_i).$$

Es ist klar, wie man nun $Z_p(X, A; G)$ zu definieren hat: Diese Gruppe besteht aus allen G-invarianten p-Ketten c mit $\delta c = 0$. Analog sei $B_p(X, A; G) = \delta C_{p+1}(X, A; G)$ sowie $H_p(X, A; G)$ die Faktorgruppe $Z_p(X, A; G)/B_p(X, A; G)$. Eine simpliziale Abbildung f: $(X, A; G) \to (Y, B; G)$ definiert eine Kettenabbildung und induziert einen Homomorphismus f_*: $H_p(X, A; G) \to H_p(Y, B; G)$. Schließlich existiert ein Randoperator δ: $H_p(X, A; G) \to H_{p-1}(A; G)$.

Sei (X', A') das simpliziale Paar, das aus (X, A) entsteht, indem man jeden Punkt x mit allen Punkten gx, $g \in G$, identifiziert. Indem man genauso wie in [6] einen mit f_* und δ vertauschbaren Isomorphismus von $H_p(X, A; G)$ auf $H_p(X', A')$ angibt, zeigt man, daß das System $H = \{H_p, f_*, \delta\}$ eine Homologietheorie auf $\mathfrak{A}_1$ im Sinne von [5] ist. Weiter kann man ebenso wie in [6] eine Čech'sche Homologietheorie auf $\mathfrak{A}$ konstruieren.

Unter dem Produkt der Räume mit Operatoren $(X_1; G_1), \ldots, (X_n; G_n)$ verstehen wir den folgenden Raum mit Operatoren $(X; G)$: X ist das topologische Produkt der X_i, G das direkte Produkt der G_i, und die Komposition ist erklärt durch

$$(g_1, \ldots, g_n)(x_1, \ldots, x_n) = (g_1 x_1, \ldots, g_n x_n).$$

§ 2. Die Homomorphismen $\nu(T_1, \ldots, T_p)$.

Von jetzt an sei die Koeffizientengruppe die Z_2. Seien $T_1, T_2, \ldots$ nicht notwendig verschiedene Untergruppen von G vom Index 2. Wir definieren im folgenden von $T_1, T_2, \ldots$ abhängige Homomorphismen

$$\nu(T_1, \ldots, T_p)\colon Z_p(X; G) \to Z_2.$$

Wir nehmen vorerst an, $(X; G)$ sei simplizial. Ist zunächst $p = 0$, so ist nach Hilfssatz 1

$$z_0 = \sum_{g \in G} gc,$$

und wir setzen

$$\nu z_0 = \text{In } c \pmod 2,$$

wobei In c die Zahl der Punkte von c bezeichnet. Da In $z_0 = o(G)$ In c ist, wobei $o(G)$ die Ordnung von G ist, hängt νz_0 nicht von der Wahl von c ab.

Die weitere Definition erfolgt durch Induktion nach p. Ist $z_p \in Z_p(X; G)$, also nach Hilfssatz 1

$$z_p = \sum_{g \in G} gc, \tag{3}$$

so bilden wir

$$d = \sum_{g \in T_p} gc, \quad \text{sowie} \quad z_{p-1} = \delta d,$$

und setzen

$$\nu(T_1, \ldots, T_p)\, z_p = \nu(T_1, \ldots, T_{p-1})\, z_{p-1}.$$

Wir müssen die Widerspruchsfreiheit dieser Definition nachweisen.

Zunächst ist $g z_{p-1} = z_{p-1}$ für $g \in T_p$. Sei t_p ein Element aus G, aber nicht in T_p, dann ist G Summe der beiden Nebenklassen $T_p + t_p T_p$, und $z_p = d + t_p d$. Aus $\partial z_p = 0$ folgt $t_p z_{p-1} = z_{p-1}$, so daß z_{p-1} in Z_{p-1} liegt. Es ist noch der Beweis der Behauptung V_p zu erbringen, daß $\nu(T_1, \ldots, T_p)\, z_p$ nicht von der Wahl von c in (3) abhängt. Außerdem zeigen wir die Behauptung W_p, daß $\nu(T_1, \ldots, T_p)\, B_p(X; G) = 0$ ist. Da V_0 schon bewiesen ist, genügt der Nachweis, daß W_p aus V_p und V_p aus W_{p-1} folgt.

$\underline{V_p \to W_p}$: Sei $z_p \in B_p(X; G)$, $z_p = \partial z_{p+1}$, $z_{p+1} \in G_{p+1}(X; G)$. Dann ist $z_{p+1} = \sum\limits_{g \in G} g c_{p+1}$, daher $d = \sum\limits_{g \in T_p} g \partial c_{p+1}$ und $\partial d = \sum g \partial \partial c_{p+1} = 0$.

$\underline{W_{p-1} \to V_p}$: Ist außer (3) noch $z_p = \sum\limits_{g \in G} g c'$ und $d' = \sum\limits_{g \in T_p} g c'$, so ist $z_{p-1} - z'_{p-1} = \partial(d - d')$. Wegen $z = d + t_p d = d' + t_p d'$ ist $d - d'$ nicht nur gegen T_p invariant, sondern auch $t_p(d - d') = d - d'$ und $z_{p-1} - z'_{p-1} \in B_{p-1}(X; G)$. Folglich ist wegen W_{p-1}

$$\nu(T_1, \ldots, T_{p-1})\, z_{p-1} - \nu(\ldots)\, z'_{p-1} = \nu(\ldots)\,(z_{p-1} - z'_{p-1}) = 0.$$

Wegen W_p darf man Homomorphismen

$$\nu(T_1, \ldots, T_p)\colon H_p(X; G) \to Z_2$$

durch $\nu(T_1, \ldots, T_p)\, \zeta = \nu(T_1, \ldots, T_p)\, z$ definieren, wobei $\zeta \in H_p(X; G)$ und z ein G-invarianter Zyklus in ζ ist. Genau so wie in [6] beweist man:

Hilfssatz 2. *Sei $f\colon (X; G) \to (Y; G)$ eine simpliziale Abbildung und $\zeta \in H_p(X; G)$, dann ist*

$$\nu(f_*(\zeta)) = \nu(\zeta).$$

Dadurch kann man die Definition der Homomorphismen $\nu(\ldots)$ auf beliebige G-Räume übertragen.

Wir nennen den Raum $(X; G)$ $(T_1, \ldots, T_p)$-*zulässig*, falls

$$\nu(T_1, \ldots, T_p)\, H_p(X; G) = Z_2$$

ist.

Die Dimension eines $(T_1, \ldots, T_p)$-zulässigen Raumes ist mindestens p. An Stelle von $(\underbrace{T_1, \ldots, T_1}_{a}, \underbrace{T_2, \ldots, T_2}_{b}, \ldots)$-zulässig schreiben wir kurz $(T_1^a, T_2^b, \ldots)$-zulässig.

Nun sei $(X; G)$ das Produkt von $(X_1; G_1), \ldots, (X_n; G_n)$. Sind $T_{i1}, T_{i2}, \ldots$ Untergruppen von G_i vom Index 2, so setzen wir $\overline{T}_{ij}$ für das direkte Produkt

$$G_1 \times \cdots \times G_{i-1} \times T_{ij} \times G_{i+1} \times \cdots \times G_n.$$

Man sieht leicht:

$$\nu(\overline{T}_{11}, \ldots, \overline{T}_{1j_1}, \overline{T}_{21}, \ldots, \overline{T}_{2j_2}, \ldots, \overline{T}_{nj_n})\, z = \prod_{i=1}^{n} \nu(T_{i1}, \ldots, T_{ij_i})\, z_i,$$

wenn z direktes Produkt der z_i ist. Daher gilt weiter: *Ist $(X_i; G_i)$ $(T_{i1}, \ldots, T_{ij_i})$-zulässig, dann ist $(X; G)$ $(\overline{T}_{11}, \ldots, \overline{T}_{nj_n})$-zulässig.*

Endlich sei (S_{m_i}, Z_2) die m_i-Sphäre und die Gruppe von Homöomorphismen bestehend aus der Identität sowie der Abbildung $x \to -x$. T_i sei die Untergruppe von Z_2 bestehend aus der Identität. Nach [6] ist (S_{m_i}, Z_2) $(T_i^{m_i})$-zulässig. Daraus ergibt sich

Hilfssatz 3. *Das Produkt* $(X; Z_2^n)$ *von* $(S_{m_1}; Z_2), \ldots, (S_{m_n}; Z_2)$ *ist* $(\overline{T}_1^{m_1}, \overline{T}_2^{m_2}, \ldots, \overline{T}_n^{m_n})$-*zulässig.*

§ 3. Beweis einer Verallgemeinerung von Satz 1.

Hilfssatz 4. *Gegeben seien ein Raum* $(X; G)$ *sowie Untergruppen* $T_1, \ldots, T_p$ *von* G *vom Index 2. Sei* F *eine abgeschlossene,* T_p*-invariante Teilmenge von* X *derart, daß* $F \cup t_p F = X$ *ist, falls* t_p *ein Element aus* G *mit* $t_p \notin T_p$ *ist. Wir setzen* $A = F \cap t_p F$. *Dann gibt es einen Homomorphismus*

$$\Delta\colon H_p(X; G) \to H_{p-1}(A; G),$$

so daß für $\zeta \in H_p(X; G)$

$$\nu(T_1, \ldots, T_p)\, \zeta = \nu(T_1, \ldots, T_{p-1})\, \Delta\zeta$$

gilt.

Beweis. Wir führen den Beweis für simpliziales $(X, A; G)$; die Verallgemeinerung auf beliebiges $(X, A; G)$ folgt den üblichen Methoden. Sei ζ eine Klasse von $H_p(X; G)$ und $z \in \zeta$. Dann ist z von der Form

$$z = d + t_p d,$$

wobei d T_p-invariant ist. Hierbei darf man wegen der T_p-Invarianz von F noch $d \in F$ verlangen. Folglich ist $\delta d \in Z_{p-1}(A; G)$.

Ist $z - z' \in B_p(X; G)$, $z' = d' + t_p d'$, $d - d' \sim t_p(d - d')$, so ist $\delta(d - d') \in B_{p-1}(X; G)$. Daher hängt die Homologieklasse von δd nur von ζ ab. Wir bezeichnen diese Homologieklasse mit $\Delta\zeta$. Dann ist $\nu(T_1, \ldots, T_p)\, \zeta = \nu(\ldots) z = \nu(T_1, \ldots, T_{p-1})\, \delta d = \nu(T_1, \ldots, T_{p-1})\, \Delta\zeta$.

Satz 4. *Sei* $(X; G)$ $(T_1, \ldots, T_p)$*-zulässig und* f *eine stetige reelle* T_p*-invariante Funktion auf* X. *Dann ist der Raum* X_1, *der aus allen* $x \in X$ *mit* $f(x) = f(gx)$ *für beliebiges* $g \in G$ *besteht,* G*-invariant. Der Raum mit Operatoren* $(X_1; G)$ *ist* $(T_1, \ldots, T_{p-1})$*-zulässig.*

Beweis. Man setze

$$F = \{x\colon x \in X,\ f(x) \leqq f(t_p x)\}, \text{ wobei } t_p \notin T_p \text{ ist,}$$

und wende Hilfssatz 4 an.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes und von Hilfssatz 3 erhält man folgenden Satz, der Satz 1 als Spezialfall $m_1 = \cdots = m_n = 1$ enthält.

Satz 5. *Sei* $(X; Z_2^n)$ *das topologische Produkt von* $(S_{m_1}; Z_2), \ldots, (S_{m_n}; Z_2)$, *und* $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$ *seien erklärt wie in Hilfssatz 3. Schließlich seien* $f_i^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, n)$ *stetige Funktionen auf* X *und sei* $f_i^{(j)}$ $\overline{T}_k$*-invariant für* $k \neq i$. *Dann gibt es ein* x^*, *so daß*

$$f_i^{(j)}(x^*) = f_i^{(j)}(gx^*)$$

für beliebiges $g \in Z_2^n$ *gilt.*

§ 4. Wege am T_2.

Durch Identifizieren der Punkte des R_2, deren Koordinaten modulo 1 kongruent sind, erhalten wir den Torus T_2. Unter einem *Weg* auf T_2 verstehen wir ein stetiges Bild einer Strecke, unter einem *geschlossenen* Weg ein stetiges Bild der Kreislinie am T_2. Die Homologieklasse, welche den geschlossenen Weg $w(t) = (t, 0)$, $0 \leqq t \leqq 1$ enthält, bezeichnen wir mit ζ_1, analog entspreche ζ_2 dem Weg $(0, t)$, $0 \leqq t \leqq 1$. Endlich sei $\zeta_0 = \zeta_1 + \zeta_2$.

Unter einem *Euklidischen Simplex* am T_2 verstehen wir eine Menge von Punkten, deren Koordinaten denjenigen der Punkte eines Euklidischen Simplex des R_2 modulo 1 kongruent sind. Ein endliches *Euklidisches Polyeder* am T_2 ist die Vereinigungsmenge endlich vieler Euklidischer Simplexe.

Hilfssatz 5[3]. *P sei ein endliches Euklidisches Polyeder am T_2. Dann liegen entweder nicht alle geschlossenen Wege auf P in Vielfachen von ζ_1, oder es gibt auf $T_2 - P$ einen geschlossenen Weg, der in ζ_1 liegt.*

Beweis. Wir betrachten den Zylinder Z, der aus dem R_2 durch Identifizieren der Punkte entsteht, deren x_1-Koordinaten mod 1 kongruent sind. Z ist Überlagerungsraum von T_2. Der Homologieklasse ζ_1 von T_2 entspricht eine Homologieklasse ζ_1' auf Z, das Polyeder P einem unendlichen Polyeder P' auf Z. (Jedem Simplex S von P ordnen wir die unendlich vielen Simplexe auf Z zu, die S überlagern.) Wir unterscheiden zwei Fälle:

α) Es gibt einen ganz auf P' liegenden Weg, mit Anfangspunkt p, Endpunkt q, $p \neq q$, welche beide Überlagerungspunkte desselben Punktes sind.

β) Es gilt nicht α).

Zu α). Dem Weg w' auf Z entspricht ein geschlossener Weg w auf T_2. Ist etwa $q_2 = p_2 + c_2$, so ist $c_2 \neq 0$, und w liegt in $c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2$, daher nicht in einem Vielfachen von ζ_1.

Zu β). Wir fügen zu Z zwei uneigentliche Punkte r, s hinzu. Die Umgebungen von r bzw. s seien die offenen Mengen auf Z, welche alle Punkte mit hinlänglich großen bzw. kleinen x_2-Koordinaten enthalten. Z mit den Punkten r, s ist der 2-Sphäre S_2 homöomorph. P'' bestehe aus P' sowie r, s. Es gibt keinen Weg in P'', der r mit s verbindet (d. h. $w(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, $w_2(t) \to \pm\infty$, wenn t nach 0 oder 1 strebt). Denn gäbe es einen solchen, so müßte er wegen der endlichen Zahl der Simplexe von P Punkte in zwei Simplexen von P' haben, die Überlagerungen desselben Simplex von P sind. Dann gäbe es aber einen Weg wie in α).

Daher liegen r, s in verschiedenen Komponenten von P''. Also existiert (etwa nach dem Dualitätssatz auf der Sphäre) in $S_2 - P''$ ein geschlossener Weg, der mit $r - s$ einmal verschlungen ist. Diesem Weg entspricht ein geschlossener Weg w' in ζ_1' und ein geschlossener Weg w in ζ_1.

Definition. Ist M eine Menge am T_2, so sei M_α^i die Menge der Punkte

$$x + \alpha e_i, \quad x \in M,$$

wobei e_i $(i = 1, 2)$ den i-ten Einheitsvektor bedeutet.

Hilfssatz 6. *Ist w ein geschlossener Weg, $w \in c_i\zeta_i$, $c_i \neq 0$, so hat w mit w_α^i $(i = 1, 2)$ einen nichtleeren Durchschnitt.*

Beweis. Sei etwa $i = 1$. Wir wählen einen Überlagerungsweg w' von w auf Z. Es ist $w' \in c_1\zeta_1'$, und daher liegen die Punkte auf Z mit genügend großem oder kleinem x_2 in verschiedenen Komponenten von $Z - w'$. Sei p bzw. $\bar{p}$ Punkt auf w' mit maximalem bzw. minimalem x_2. Ist p_α^1 oder $\bar{p}_\alpha^1$ auf w', so sind wir fertig. Oder p_α^1 und $\bar{p}_\alpha^1$ liegen in verschiedenen Komponenten von $Z - w'$. Da w' zusammenhängend ist, hat daher w'^1_α mit w' Punkte gemeinsam. Also hat auch w_α^1 mit w Punkte gemeinsam.

Definition. Wir nennen f *simplizial* auf T_2, falls f stetig ist und es eine Simplizialzerlegung des T_2 in Euklidische Simplexe gibt, so daß f auf jedem Simplex linear ist.

Wir setzen τ_0 für das Produkt der Involutionen τ_1, τ_2.

[3]) Dieser Satz scheint ein Spezialfall eines etwaigen „Dualitätssatzes auf dem Torus" zu sein.

Hilfssatz 7. *Sei f simplizial auf T_2. Dann liegt auf der Menge K_i der Punkte x mit $f(x) = f(\tau_i x)$ ein geschlossener Weg, der nicht in einem Vielfachen von ζ_i liegt ($i = 0, 1, 2$).*

Beweis. Wir betrachten den Fall $i = 1$. Man darf Hilfssatz 5 auf K_1 anwenden. Es genügt daher der Nachweis, daß es auf $T_2 - K_1$ keinen geschlossenen Weg w gibt, der in ζ_1 liegt.

Gäbe es einen solchen Weg, so wäre wegen der Stetigkeit entweder $f(x) > f(\tau_1 x)$ oder $f(x) < f(\tau_1 x)$ für alle x auf w. Sei etwa $f(x) > f(\tau_1 x)$. Dann ist $f(x) < f(\tau_1 x)$, falls x auf $w_{\frac{1}{2}}^1$ liegt. Der gewünschte Widerspruch folgt nach Hilfssatz 6 daraus, daß w, $w_{\frac{1}{2}}^1$ einen nicht leeren Durchschnitt besitzen.

Sei G_i ($i = 0, 1, 2$) die Gruppe jener Homologieklassen ζ, in denen es einen geschlossenen Weg w auf K_i gibt.

Hilfssatz 8. *Es gibt keine Homologieklasse ζ, so daß alle Klassen aus G_0, G_1, G_2 Vielfache von ζ sind.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein solches ζ, sei etwa $\zeta = a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2$. Man darf annehmen, a_1, a_2 seien teilerfremd. Es gilt dann genau eine der Kongruenzen

$$a_1 \equiv 0, \quad a_2 \equiv 0, \quad a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod 2.$$

Nehmen wir etwa an, es sei $a_2 \equiv 0 \pmod 2$. Dann ist $a_1 \not\equiv 0 \pmod 2$. Es gibt eine unimodulare Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die auf T_2 definierte simpliziale Funktion

$$g(x_1, x_2) = f(a_1 x_1 + b_1 x_2, a_2 x_1 + b_2 x_2).$$

Es gibt in $K_1(g)$ einen geschlossenen Weg w, $w \in c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2$, $c_2 \neq 0$. Durch die Abbildung $(x_1, x_2) \to (a_1 x_1 + b_1 x_2, a_2 x_1 + b_2 x_2)$ geht dieser Weg in einen Weg $\bar{w} \in c_1(a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2) + c_2(b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2)$ über. Nun ist nach Konstruktion von g der Weg $\bar{w}$ in $K_1(f)$. Da $\bar{w}$ kein Vielfaches von ζ ist, erhalten wir einen Widerspruch. Ähnlich schließt man bei $a_1 \equiv 0$ oder $a_1 + a_2 \equiv 0$.

§ 5. Beweis von Satz 2.

Hilfssatz 9. *Eine Menge bestehend aus zwei Punkten hat die Eigenschaft* $\mathfrak{E}$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, die beiden Punkte haben Koordinaten $(0, \ldots, 0)$ und $(x_1, \ldots, x_n)$. Weiter darf man voraussetzen, $(x_1, \ldots, x_n)$ sei von der Form $(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$, wobei $a_1, \ldots, a_n$ ganz, $\lambda \neq 0$ ist, denn der allgemeine Fall folgt daraus durch einen Grenzübergang. Die Funktion $g(y) = f(a_1 y, \ldots, a_n y)$ ist stetig, und es gilt $g(y + 1) = g(y)$. Es gibt daher ein y^*, so daß $g(y^* + \lambda) = g(y^*)$ ist, woraus Hilfssatz 9 folgt.

Hilfssatz 10. *Sei f stetig am T_2. Dann gibt es ein x^* mit $f(x^*) = f(\tau_1 x^*) = f(\tau_2 x^*)$.*

Beweis. Da der allgemeine Fall daraus durch einen Grenzübergang folgt, dürfen wir f als simplizial voraussetzen. Wir bilden K_i, G_i wie in § 4 und schließen aus Hilfssatz 8 und der Tatsache, daß kein G_i leer ist: Es gibt i, j, $i \neq j$ ($i, j = 0, 1, 2$), mit $\xi_i \in G_i$, $\xi_j \in G_j$, wobei ξ_i, ξ_j linear unabhängig sind. Daher ist die Schnittzahl $S(\xi_i, \xi_j) \neq 0$ und haben K_i und K_j mindestens einen Punkt gemeinsam. Haben K_1, K_2 einen Punkt gemeinsam, so sind wir fertig. Haben K_0, K_1 einen Punkt $\bar{x}$ gemeinsam, so setzen wir $x^* = \tau_1\bar{x}$; ist $\bar{x} \in K_0 \cap K_2$, so sei $x^* = \tau_2\bar{x}$.

Hilfssatz 11. *Eine Menge am T_n bestehend aus drei Eckpunkten eines Würfels $W(x)$ hat die Eigenschaft $\mathfrak{E}$.*

Beweis. Seien die Punkte etwa x', x'', x'''. Dann ist

$$g(y_1, y_2) = f(2y_1(x'' - x') + 2y_2(x''' - x'))$$

stetig am T_2 und es gibt gewisse $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ mit

$$g(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = g(\bar{y}_1 + \tfrac{1}{2}, \bar{y}_2) = g(\bar{y}_1, \bar{y}_2 + \tfrac{1}{2}).$$

Setzen wir

$$x^* = 2\bar{y}_1(x'' - x') + 2\bar{y}_2(x''' - x'),$$

so ist

$$f(x^*) = f(x^* + x'' - x') = f(x^* + x''' - x').$$

Hilfssatz 12. *Eine Menge M am T_n mit Eigenschaft $\mathfrak{E}$ mit mindestens drei Punkten besteht aus Eckpunkten eines Würfels $W(x)$.*

Beweis. Wir greifen 3 Punkte p, q, r aus M heraus und haben zu zeigen: $p_i \equiv q_i \equiv r_i \pmod{\frac{1}{2}}$ für jedes i. Sei nun i fest; wir dürfen annehmen, es sei nicht $p_i \equiv q_i \equiv r_i \pmod 1$. Dann gibt es ein $j \neq i$, so daß (p_i, p_j) (q_i, q_j), (r_i, r_j) mod 1 paarweise voneinander verschieden sind.

Das Beispiel $f(x) = \sin 2\pi x_i$ lehrt, daß zwei der Zahlen des Tripels (p_i, q_i, r_i) mod 1 gleich sein müssen. Ebenso müssen je zwei der Zahlen in den Tripeln (p_j, q_j, r_j), $(p_i + p_j, q_i + q_j, r_i + r_j)$, $(p_i - p_j, q_i - q_j, r_i - r_j)$ modulo 1 gleich sein. Ist etwa ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_i \equiv q_i$, $p_j \equiv r_j \pmod 1$, so ist wegen der paarweisen Verschiedenheit nur noch $q_i + q_j \equiv r_i + r_j$, $q_i - q_j \equiv r_i - r_j \pmod 1$ möglich. Dann ist $2q_i \equiv 2r_i \pmod 1$, daher $p_i \equiv q_i \equiv r_i \pmod{\frac{1}{2}}$.

Hilfssatz 13. *Keine Menge mit 4 Punkten hat die Eigenschaft $\mathfrak{E}$.*

Beweis. Auf Grund des in der Einleitung gegebenen Beispiels darf man $n > 2$ annehmen. Seien die Punkte etwa $0, p, q, r$. Nach Hilfssatz 12 müssen die Koordinaten $\equiv 0$ oder $\equiv \frac{1}{2} \pmod 1$ sein. Durch eine unimodulare Transformation kann man p in $(p_1, 0, \ldots, 0)$ überführen, und darf $p_1 = \frac{1}{2}$ annehmen. Unter Beibehaltung von p kann man nun q in $(q_1, q_2, 0, \ldots, 0)$ überführen. Man darf nun $q_2 = \frac{1}{2}$ annehmen und daher q in $(0, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)$ transformieren. Entweder ist r kongruent $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)$ mod 1, oder man kann r in $(0, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0)$ überführen.

In jedem der beiden Fälle setzen wir

$$f(x) = k(x_1 + x_3, x_2 + x_3),$$

wobei k die in der Einleitung definierte Funktion ist. Wäre nun im ersten Falle $f(x) = f(\tau_1 x) = f(\tau_2 x) = f(\tau_1\tau_2 x)$, oder wäre im zweiten Falle $f(x) = f(\tau_1 x) = f(\tau_2 x) = f(\tau_3 x)$, so hätte man auf jeden Fall $k(x) = k(\tau_1 x) = k(\tau_2 x) = k(\tau_1\tau_2 x)$, was ausgeschlossen ist.

Beweis von Satz 2. Der Satz folgt sofort aus den Hilfssätzen 9 bis 13.

§ 6. Beweis von Satz 3.

Beweis für $\alpha = \frac{1}{2}$. Wir nehmen $f(x_1, x_2)$ wieder simplizial an. Wieder sei K_1 die Menge der Punkte x mit $f(x) = f(\tau_1 x)$. Nach Hilfssatz 7 gibt es einen geschlossenen Weg w in K_1, der nicht in einem Vielfachen von ζ_1 liegt. Er liege etwa in $c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2$, $c_2 \neq 0$. Sei t modulo 1 der Parameter von w; $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$. Wir bilden den neuen Weg

$$z(t) = (f(w_1(t), w_2(t)), w_2(t)).$$

Dann ist $z \in c_2 \zeta_2$ und nach Hilfssatz 6 hat z mit z_β^2 einen nicht leeren Durchschnitt. Ist etwa

$$(f(w_1(t),\ w_2(t)),\ w_2(t)) = (f(w_1(t'),\ w_2(t')),\ w_2(t') - \beta),$$

und setzt man $y_1 = w_1(t)$, $y_2 = w_2(t)$, $y_1' = w_1(t')$, so gilt

$$f(y_1, y_2) = f(y_1 + \tfrac{1}{2}, y_2) = f(y_1', y_2 + \beta) = f(y_1' + \tfrac{1}{2}, y_2 + \beta).$$

Beweis für $\alpha = \frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$. K sei die Menge der x, für die mindestens zwei der Werte $f(x_1, x_2)$, $f(x_1 + \frac{1}{3}, x_2)$, $f(x_1 + \frac{2}{3}, x_2)$ gleich sind. Ähnlich wie in Hilfssatz 7 erkennt man, daß es in K einen geschlossenen Weg w gibt, der nicht in einem Vielfachen von ζ_1 liegt. Wir setzen $g(t)$ gleich jener Zahl, die zweimal unter den Zahlen $f(w_1(t),\ w_2(t))$, $f(w_1(t) + \frac{1}{3},\ w_2(t))$, $f(w_1(t) + \frac{2}{3},\ w_2(t))$ vorkommt. $g(t)$ ist stetig, wir bilden den Weg

$$z(t) = (g(t),\ w_2(t)).$$

Alles weitere geht wie bei $\alpha = \frac{1}{2}$.

Literaturverzeichnis.

[1] *K. Borsuk*, Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre, Fund. Math. **20** (1933), 177—190.

[2] *S. Kakutani*, A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed set in R^3, Ann. of Math. (2) **43** (1942), 739—741.

[3] *H. Yamebe* und *Z. Yujobo*, On the continuous functions defined on a sphere, Osaka Math. J. **2** (1950), 19—22.

[4] *F. J. Dyson*, Continuous function defined on spheres, Ann. of Math. (2) **54** (1951), 534—536.

[5] *S. Eilenberg* und *N. Steenrod*, Foundations of algebraic topology, Princeton 1952.

[6] *C. T. Yang*, On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamebe-Yujobo and Dyson, I und II, Ann. of Math. **60** (1954), 262—286 und **62** (1955), 271—283.

[7] *C. T. Yang*, Continuous functions from spheres to Euclidean spaces. Ann. of Math. **62** (1955), 284—292.

[8] *E. E. Floyd*, Real-valued mappings of spheres, Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955), 957—959.

[9] *D. G. Bourgin*, Some mapping theorems, Rend Mat. e Appl. Roma **15** (1956), 177—189.

[10] *H. Hadwiger*, Ein Satz über stetige Funktionen auf der Kugelfläche, Archiv der Math. **11** (1960), 65—68.

Eingegangen 17. Mai 1960.

Eine unveröffentlichte Jugendarbeit C. G. J. Jacobis über wiederholte Funktionen *).

Von *Kurt-R. Biermann* in Berlin.

Inhalt.

Vorbemerkung.
Gutachten über Jacobis Abhandlung.
C. G. J. Jacobi: Von den wiederholten Funktionen.
Namenverzeichnis.

Vorbemerkung.

Nur im Wintersemester 1825/26 ist C. G. J. Jacobi als Privatdozent in Berlin tätig gewesen, nämlich nach seiner mit der Habilitation verbundenen Promotion am 13. August 1825 bis zur Übersiedlung nach Königsberg Anfang Mai 1826. Zu Beginn dieser Zeit ist die nachstehend erstmals publizierte Arbeit des damals Einundzwanzigjährigen entstanden. Daß sie sowohl seinem Biographen L. Koenigsberger [1]) als auch C. W. Borchardt bzw. K. Weierstraß bei der Edition seiner Gesammelten Werke [2]) entgangen ist, mag darauf zurückzuführen sein, daß sie an einer Stelle aufbewahrt wurde, wo sie niemand vermutete [3]), und daß sie von der mathematischen Klasse der Berliner Akademie der Wissenschaften, der sie durch den Autor vorgelegt worden war, „mit Stillschweigen" übergangen ist, wie wir aus den unten ebenfalls wiedergegebenen Gutachten [4]) erfahren.

Über die Gutachter ist folgendes zu sagen. Mit Ausnahme des Astronomen J. Fr. Encke (Akademie-Mitglied seit 1825), eines Gauß-Schülers, hat keiner der Referenten

*) Die Redaktion des Crelleschen Journals, in dem Jacobi einst so zahlreiche bedeutende Arbeiten veröffentlichte, hält die Publikation dieser kürzlich wieder aufgefundenen Jugendarbeit Jacobis nicht nur aus historischen Gründen für gerechtfertigt, ja geboten, sondern auch deshalb, weil sich bereits in ihr sein auf formale Eleganz und algebraische Durchdringung gerichtetes Streben zeigt, wie es für seine späteren Arbeiten charakteristisch ist, für das aber seine damaligen Gutachter offenbar kein Verständnis hatten.

[1]) *Leo Koenigsberger*, Carl Gustav Jacob Jacobi, Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, Leipzig 1904.

[2]) *C. G. J. Jacobi's* Gesammelte Werke, ed. C. W. Borchardt (Bd. 1), K. Weierstraß (Bd. 2—7) u. A. Clebsch (Suppl.), Berlin 1881—91; insbes. Verzeichnis sämtl. Abh. Jacobis in Bd. 7, Berlin 1891, S. 425—440.

[3]) Archiv der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Verh. u. wiss. Korresp. d. math. Klasse, 2 (1824—26), (II—VIc—2, Bl. 115—125). — In der gleichen Akte befindet sich übrigens ein Brief J. P. G. Lejeune Dirichlets (mit einem Zusatz A. v. Humboldts) aus Paris vom 14. Mai 1826, aus dem wir von einer ebenfalls bisher unbeachtet gebliebenen Jugendarbeit Dirichlets (*Eytelwein*, Sur le mouvement de l'eau, trad. p. Lej. Dirichlet, Paris 1826, 8°) erfahren (vgl. hierzu *Kurt-R. Biermann*, Dirichletiana; MonBer. Dt. Akad. Wiss. 2 (1960), 336—339. — Seit dem Erscheinen dieser Arbeit wurde festgestellt, daß Dirichlets Übersetzung auszugsweise gedruckt worden ist: Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris, 1823, 113—115).

[4]) Archiv der Dt. Akad. Wiss., II—VIc—2, Bl. 113—114.

tiefere Spuren in der Wissenschaftsgeschichte hinterlassen. E. H. Dirksen, der uns schon im Zusammenhang mit Jacobi durch sein Urteil über dessen Dissertation bekannt ist[5]) und dessen Urteilskraft auch bei der Begutachtung der Doktorarbeit von Franz Neumann[6]), des späteren Begründers der ersten wichtigen mathematischen Schule in Deutschland gemeinsam mit Jacobi, in wenig rühmlichem Lichte erscheint, war seit 1824 Ordinarius für Mathematik an der Berliner Universität, außerdem seit 1825 ordentliches Mitglied der Berliner Akademie. Er hat ebensowenig wie der Mathematiklehrer am Kadettenkorps und an der Bauakademie J. Ph. Gruson mathematische Forschungen von bleibendem Wert geleistet. Von Gruson ist außer der Tatsache, daß er fast 60 Jahre (1798 bis 1857) der Akademie angehört hat, kaum etwas Bemerkenswertes zu berichten. Auch Fr. Th. Poselger (ordentl. Akad.-Mitgl. gemeinsam mit Encke und Dirksen seit dem 21. Juni 1825), Mathematiklehrer an der Allgemeinen Kriegsschule, ist nicht mit besonderen Leistungen hervorgetreten. Der tüchtige Mathematik- und Physiklehrer am Berliner Gymnasium zum Grauen Kloster E. G. Fischer (in der Akademie seit 1803), Zielscheibe Goetheschen Spottes[7]), ist in der Geschichte der Mathematik durch seine Kontroverse mit den Kombinatorikern (K. F. Hindenburg, H. A. Töpfer, H. A. Rothe) bekannt. J. A. Eytelwein (Akademiker seit 1803) war Leiter des preußischen Bauwesens, übrigens ebenso wie Poselger Autodidakt; er hat Verdienste in der Bautechnik. Von J. Oltmanns schließlich ist kein Zeugnis erhalten geblieben, das auf ein selbständiges Urteil über fremde Leistungen schließen läßt[8]). Er hat die von Alexander von Humboldt auf seiner amerikanischen Reise angestellten astronomischen Beobachtungen und barometrischen Messungen bearbeitet[9]); der Akademie gehörte er seit 1810 an[10]).

Wenn wir von Encke absehen, gehören alle Gutachter der Epoche an, die zwischen den durch die Namen Euler, Lambert, Lagrange einerseits, Steiner, Dirichlet und Jacobi, anschließend Kummer, Weierstraß und Kronecker andererseits charakterisierten Blütezeiten der Mathematik an der Berliner Akademie liegt.

Bei der Wiedergabe der Texte haben wir uns von folgenden Gesichtspunkten leiten lassen: Es wird in, sagen wir, 50 Jahren wenig interessant sein, Jacobis Ausführungen beispielsweise in der heute üblichen, dann voraussichtlich schon wieder längst veralteten Schreibweise kennenzulernen. Es wurde daher nichts modernisiert, sondern die Originalschreibung beibehalten. Nur in die Interpunktion wurde in wenigen Fällen eingegriffen, wenn dies dem leichteren Verständnis dienlich schien. Offensichtliche grammatikalische Versehen und Schreibfehler in den Formeln wurden korrigiert.

Gutachten über Jacobis Abhandlung.

Dr. Jacobi, Ueber die wiederholten Funktionen.

Ich habe die Jacobische Abhandelung über die wiederholten Funktionen, welche er für einen Zusatz zu derjenigen Abhandelung ausgiebt, welche Tralles über diesen

---

[5]) Vgl. *L. Koenigsberger*, a. a. O., S. 12.

[6]) *Kurt-R. Biermann*, Aus den Anfängen d. wiss. Laufbahn Franz Neumanns . . .; Forsch. u. Fortschr., **34** (1960), 98—101, insbes. 98—99.

[7]) Vgl. *Fr. Klemm*, Die Berliner Philomatische Gesellschaft (Philomatie); Sudhoffs Archiv, **42** (1958), 39—45, insbes. 44.

[8]) *Kurt-R. Biermann*, a. a. O. [6]), S. 99.

[9]) A. von Humboldt und Aimé Bonpland's Reise, Astronom. Theil, Paris 1810, 2 Bde. (durch A. v. Humboldt u. J. Oltmanns übrigens Fr. X. Frh. v. Zach und C. F. Gauß gewidmet).

[10]) Die angegebenen Zugehörigkeitsdaten der Gutachter zur Berliner Akademie beziehen sich auf den Eintritt als außerord. od. ordentl. Mitglied, nicht auf korrespondierende Mitgliedschaft.

Gegenstand geschrieben hat[11]), gelesen und zugleich mit dieser verglichen. Ich habe erstere eben so dürftig, als letztere reichhaltig gefunden. Der Hauptgegenstand der Jacobischen Abhandelung betrifft die Entwicklung von $f^z(u)$ nach Potenzen von u, so fern er $fu = au + bu^2 + cu^3 \ldots$ setzt, der nur einen Theil der Trallesschen Abhandelung ausmacht. Tralles bedient sich hier einer Methode, welche auch auf den Fall ihre Anwendung findet, wo a, b, c, etc. Funktionen von x sind; Jacobi hingegen giebt bloß combinatorische Ausdrücke für den Fall, wo a, b, c, etc. constant sind. Die Derivation dieser combinatorischen Ausdrücke und ihre Generalisirung macht den Inhalt der elf ersten Paragraphen aus, welche Betrachtungen im 12. § durch die Bemerkung beschlossen werden, daß solche combinatorische Bildungsweise (also die Leistung des Verfassers selbst) nur ein sehr untergeordnetes Interesse habe. Hr. Jacobi gesteht also offenherzig, daß, obgleich er seine Abhandelung einen Zusatz zu der Trallesschen nennt, er dennoch nicht glauben dürfe, daß sie der Trallesschen Ehre mache. — Die übrigen Bemerkungen der 12 §§ zeigen hinlänglich, daß der Verfasser über den nächsten Zweck der mathematischen Betrachtungen noch keine vollkommen klare Ansicht hat. Mehr eigenthümlich sind dem Verfasser die Betrachtungen von § 13 bis § 18, das Ende der Abhandelung nahmentlich. Sie sind auf eine Weise durchgeführt, die zwar den Anfänger, jedoch den sich auf gutem Wege befindlichen Anfänger, bezeichnet.

Da durch diese Abhandelung für die Wissenschaft nicht nur nichts geleistet wird, sondern dieselbe auch der Trallesschen sehr weit nachsteht: so dürfte, meines Erachtens, der Empfang derselben, von Seiten der mathematischen Klasse der Königl. Akademie, mit Stillschweigen zu übergehen seyn.

Berlin, den 6. Nov. 1825 Dirksen

Dieser Ansicht trete ich vollkommen bey.

d. 20. Dcbr. Encke

Herrn *Tralles* Abh. über die wiederholten Funktionen ist nach meiner Kenntniß die erste Abh. (gelesen den 1. Aug. 1811), welche über diesen Gegenstand bekannt geworden ist. Später hat Herr Babbage (Annales of philosophy, Nov. 1817) u. in einer Sammlung von Beisp. zur Anwendung des Caculs auf endliche Differenzen von J. F. W. Herschel, Cambridge, 1820[12]), von diesen Funktionen u. ganz besonders von den periodischen Funktionen u. dieses ziemlich umständlich gehandelt; wahrscheinlich meint Hr. Jacobi diese Leistungen von Hn. Babbage, die er billig näher hätte angeben sollen.

Herr J. hat in der That in den ersten 11 §en seiner vorliegenden Abh. nur auf combinatorischem Wege die Coeff. zu bestimmen gesucht, die in der Trallesschen Abh. auf der 4ten Seite vorkommen; dieses hat er meines Bedünkens richtig u. gut ausgeführt, ist aber bei gehöriger Bekanntschaft mit dem combinatorischen Verfahren die Arbeit eines angehenden Analysten angemessen. Noch muß ich hinzusetzen, daß die gedachten Coefficienten, besonders wenn sie für höhere Potenzen als zu u^6 berechnet werden sollen, sie auf dem combinatorischen Wege sich leichter als nach Tralles berechnen lassen. Der übrige Theil der Jacobischen Abh. vom § 13 bis zu Ende hätte bei Babbages treflichen Vorarbeiten nicht so dürftig ausfallen müssen, wenn sie die Aufmerksamkeit der Classe verdienen sollte.

Gruson den 24ten Dec. 25.

---

[11]) *Joh. Gg. Tralles*, Von wiederholten Funktionen; Math. Abh. der Akad. Wiss. zu Berlin, 1814/15, 216—235.

[12]) *Ch. Babbage*, Essay towards the calculus of functions; Philosoph. Transact. 1815, 389—423, 1816, 179 bis 256, und im Anhang zu A. collect. of examples of the appl. on the calc. of finite diff., Cambridge 1820.

Ich vermisse in Herrn Jacobi's Aufsatz, wiederholte Functionen betreffend, durchaus die Bündigkeit eines schulgerechten Vortrages. Er gleicht mehr einer Sammlung zufälliger Gedanken, als einer förmlichen Demonstration. Kaum giebt er irgendwo das Ziel an, worauf er losgeht. Will er die Trallessche Abhandlung erläutern, oder erweitern? Ich weiß darauf aus seiner Schrift nichts zu antworten. Offenbar zerfällt diese in zwei ganz von einander verschiedene Abtheilungen vom 1sten bis zum 11ten § und vom 12 ten bis zu Ende. Die Absicht der ersteren kann ich nur darin finden, in Tralles Weise ε) für $\overset{x}{f}u$ die Richtigkeit der Glieder des Coefficienten von u^6, sowohl Hinsichts der darin vorkommenden algebraischen Werthe, als was die damit verbundenen absoluten Zahlen betrifft, nachzuweisen. Dies ist nun gar nicht schwer, wenn man den Gang verfolgt, welchen T. zur Findung der Coefficienten von $u^2 \ldots u^5$ eingeschlagen hat; auch ist die Rechnung nicht lang, wenn sie methodisch geführt wird. Herr J. glaubt auf einem andern Wege dahin zu gelangen. Ich muß aber gestehen, daß ich aus seiner Schrift mit aller Aufmerksamkeit zu keinem klaren Verständniß darüber gekommen bin; daß mir namentlich die von ihm im § 10 ertheilten praktischen Vorschriften dunkel geblieben sind.

Die zweite Abtheilung der Jacobischen Schrift scheint mehr eine vorläufige Andeutung zu sein von dem, was der Verf. künftighin noch zu versuchen willens ist, als eine wirkliche Leistung. Es wird daher für zuläßig gehalten werden dürfen, das Urtheil darüber bis dahin zu verschieben, wenn Herr J. mit seinen noch für sich behaltenen Ideen zur Vollendung wird gekommen sein.

Poselger[13]) 21. Dec. 1825.

Ich habe in der Mappe, ausser der Abhandlung des Hn. Jacobi, nichts als die Vota der Herren Dirksen, Encke, Grüson u. Poselger gefunden. Daher ist mir die Veranlassung dieses Umlaufes nicht klar. Hat Hr. J. seine Schrift an das Ministerium, oder an die Academie, oder an die math. Classe geschickt, oder sie vielleicht nur dem Hr. Secretar oder einem andern Mitgliede vorgelegt? Dergleichen Notizen scheinen mir in Fällen dieser Art nicht überflüssig.

Was die Schrift selbst betrifft, so sind die Urtheile meiner Herrn Vorgänger so übereinstimmend und gründlich, daß ich mich nicht anders als völlig einverstanden erklären kann. Ist gleich der wissenschaftliche Werth der Arbeit nicht erheblich, so zeigt sich doch der Verfasser als ein fähiger Kopf, der Aufmunterung verdient.

E. G. Fischer d. 29. Dec. 1825

Unbekannt mit der Veranlassung, durch welche die einliegende Schrift d. Hn. Jacobi in Umlauf gesetzt worden ist, kann ich nur dem Urtheile meiner Herrn Collegen beitreten, weshalb diese Schrift von Seiten der mathematischen Klasse mit Stillschweigen zu übergehen ist.

Berlin, 1. Januar 1826 Eytelwein

Auch ich trete dem vorstehenden Urtheile meiner Herrn Kollegen bey; glaube zugleich, daß die Jacobische Abhandlung stillschweigend und unbeschadet der Wissenschaft reponirt werden könne.

Berlin d. 10. Januar 1826 J. Oltmanns

[13]) Poselger hat sein Gutachten auf einem besonderen Blatt abgegeben. Es gehört zeitlich hinter dasjenige Enckes. Da aber Fischer in seiner Stellungnahme die Reihenfolge „Dirksen, Encke, Grüson, Poselger" angibt, wurde der Übersichtlichkeit halber diese Anordnung beibehalten.

Jacobis Abhandlung.

Von den wiederholten Functionen.

(Ein Zusatz zu der Abhandlung des Herrn Tralles über diesen Gegenstand in den Jahresbüchern der preußischen Academie der Wissenschaften von 1818)[14].

1.

Wir wollen der Deutlichkeit wegen mit Tralles' Definition beginnen.

„Unter wiederholten Functionen", sagt er, „sind solche zu verstehn, wie $f \cdot f \cdot f \cdots fu$, wo fu irgend eine Function von u, aber $f(fu)$ oder ffu eben die Function von fu als diese von u; $f(f(fu))$ oder $\overset{3}{f}u$ eben die Function von ffu u. s. w. ist"[15].

Tralles nimmt für fu eine Reihe von der Form

$$au + bu^2 + cu^3 + du^4 + \text{etc.}$$

Wir wollen nun, indem wir gleichfalls diese Reihe zum Grunde legen, durch combinatorische Induction, was sich am nächsten darbietet, die Bildungsweise der Coefficienten der wiederholten Functionen, welche eben so nach den Potenzen von u fortschreiten, aus den Coefficienten der ursprünglich für fu aufgenommenen Reihe erforschen.

2.

Zu diesem Ende wollen wir, indem wir die für fu angenommene Reihe

$$au + bu^2 + cu^3 + du^4 + \text{etc.}$$

gleich U setzen, den Coefficienten von u^n in der $m$ten Potenz von U mit

$$U^m_n$$

bezeichnen; so daß also allgemein sein wird:

$$U^m = U^m_m u^m + U^m_{m+1} u^{m+1} + \cdots + U^m_n u^n + \text{cet};$$

was für $m = 1$ die ursprüngliche Reihe giebt:

$$fu = U = U^1_1 u + U^1_2 u^2 + U^1_3 u^3 + \cdots + U^1_n u^n + \text{cet.}$$

Eine ähnliche Bezeichnung braucht Schweins[16] in seiner Analyse und andre.

3.

Man erhält zunächst $\overset{2}{f}u$ aus fu, indem man in fu oder U statt u wieder fu oder U setzt. Hiernach wird also

$$\overset{2}{f}u = U^1_1 U + U^1_2 U^2 + U^1_3 U^3 + \cdots + U^1_n U^n + \text{cet};$$

so daß also der Coefficient von u^n in $\overset{2}{f}u$ sein wird

$$U^1_1 U^1_n + U^1_2 U^2_n + U^1_3 U^3_n + \cdots + U^1_n U^n_n,$$

welches wir nach der längst üblichen Theorie der sogenannten combinatorischen Integrale, welche Rothe[17] auf bestimmte Sätze zurückzuführen bemüht war, bezeichnen wollen mit

$$\sum_{\{1 \leq \alpha \leq n\}} U^1_\alpha U^\alpha_n,$$

[14] Ein Versehen Jacobis; vgl. ob. Anm. [11].

[15] A. a. O., S. 216.

[16] *Fr. F. Schweins*, Analysis, combinatorisch bearbeitet, Heidelberg 1820.

[17] *H. A. Rothe*, Theorie der combinatorischen Integrale, Nürnberg 1819.

welches nämlich bedeutet, daß man in dem Ausdruck $U_\alpha^1 U_n^\alpha$ alle ganze positive Zahlen von 1 incl. bis n incl. für α setzen, und die Summe dieser Ausdrücke nehmen solle. Man erhält auf diese Weise:

$$\overset{2}{f}u = U_1^1 U_1^1 \cdot u + \sum_{\{1 \leq \alpha \leq 2\}} U_\alpha^1 U_2^\alpha \cdot u^2 + \sum_{\{1 \leq \alpha \leq 3\}} U_\alpha^1 U_3^\alpha \cdot u^3 + \cdots + \sum_{\{1 \leq \alpha \leq n\}} U_\alpha^1 U_n^\alpha \cdot u^n + \text{cet.}$$

Die Identität des Buchstabens α in den verschiedenen Gliedern ist hier zufällig, denn an sich keinen Werth habend, erhält er seine Bedeutung erst durch die untergesetzte Bedingung.

4.

Indem man in die für $\overset{2}{f}u$ gefundene Reihe wieder U statt u setzt, erhält man

$$\overset{3}{f}u = U_1^1 U_1^1 U + \sum_{\{1 \leq \alpha \leq 2\}} U_\alpha^1 U_2^\alpha U^2 + \sum_{\{1 \leq \alpha \leq 3\}} U_\alpha^1 U_3^\alpha U^3 + \cdots + \sum_{\{1 \leq \alpha \leq n\}} U_\alpha^1 U_n^\alpha U^n + \text{cet};$$

also den Coefficienten von u^n in $\overset{3}{f}u$:

$$U_1^1 U_1^1 U_n^1 + \sum_{\{1 \leq \alpha \leq 2\}} U_\alpha^1 U_2^\alpha U_n^2 + \sum_{\{1 \leq \alpha \leq 3\}} U_\alpha^1 U_3^\alpha U_n^3 + \cdots + \sum_{\{1 \leq \alpha \leq n\}} U_\alpha^1 U_n^\alpha U_n^n,$$

welches man wieder darstellen kann durch:

$$\sum_{\{1 \leq \alpha \leq \beta \leq n\}} U_\alpha^1 U_\beta^\alpha U_n^\beta.$$

Es sieht jeder sogleich, daß man auf gleiche Weise den Coefficienten von u^n in $\overset{4}{f}u$ findet

$$\sum_{\{1 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq n\}} U_\alpha^1 U_\beta^\alpha U_\gamma^\beta U_n^\gamma,$$

und allgemein, indem man statt

$$\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma\,,\ \text{cet. resp.}$$
$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \text{cet.}$$

setzt, den Coefficienten von u^n in $\overset{x}{f}u$:

A) $$\sum_{\{1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{x-1} \leq n\}} U_{a_1}^1 U_{a_2}^{a_1} U_{a_3}^{a_2} \cdots U_{a_{x-1}}^{a_{x-2}} U_n^{a_{x-1}}.$$

Und somit wäre die gesuchte unabhängige Bildungsweise gefunden.

5.

Das combinatorische Gesetz der Bildungsweise A) verliert nichts von seiner Einfachheit, wenn man $\overset{x}{\varphi f} u$ statt $\overset{x}{f}u$ sucht, wo $\varphi u = V$ die Reihe

$$V_\alpha u^\alpha + V_{\alpha+1} u^{\alpha+1} + V_{\alpha+2} u^{\alpha+2} + \cdots + V_{\alpha+n} u^{\alpha+n} + \text{cet.}$$

bedeutet. Denn man erhält wieder

$$\varphi f u,\ \overset{2}{\varphi f} u,\ \overset{3}{\varphi f} u,\ \ldots,\ \overset{x}{\varphi f} u$$

$$\text{resp. aus } \varphi u,\ \overset{2}{\varphi f} u,\ \overset{3}{\varphi f} u,\ \ldots,\ \overset{x-1}{\varphi f} u,$$

wenn man fu statt u substituirt. Hierdurch wird der Coefficient von $u^{\alpha+n}$ in $\varphi f u$:

$$V_\alpha U_{\alpha+n}^\alpha + V_{\alpha+1} U_{\alpha+n}^{\alpha+1} + V_{\alpha+2} U_{\alpha+n}^{\alpha+2} + \cdots + V_{\alpha+n} U_{\alpha+n}^{\alpha+n}, \text{ oder}$$

$$\sum_{\{\alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha+n\}} V_{\alpha_1} U_{\alpha+n}^{\alpha_1}.$$

Eben so erhält man den Coefficienten von $u^{\alpha+n}$ in $\overset{2}{\varphi} fu$:

$$\sum_{\{\alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha+n\}} V_{\alpha_1} U^{\alpha_1}_{\alpha_2} U^{\alpha_2}_{\alpha+n};$$

und allgemein den Coefficienten von $u^{\alpha+n}$ in $\overset{x}{\varphi} fu$:

$$\text{B)} \qquad \sum_{\{\alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \alpha_x \leq \alpha+n\}} V_{\alpha_1} U^{\alpha_1}_{\alpha_2} U^{\alpha_2}_{\alpha_3} \cdots U^{\alpha_x}_{\alpha+n}$$

6.

Es ist leicht zu sehn, daß, wenn man den Coefficienten von $u^{\alpha+n}$ in $\overset{x}{\varphi} f \Pi u$ sucht, wo

$$\Pi u = P = P_1 u + P_2 u^2 + P_3 u^3 + \cdots \text{ cet.},$$

und wieder

$$P^m = P^m_m u^m + P^m_{m+1} u^{m+1} + P^m_{m+2} u^{m+2} + \cdots \text{ cet.},$$

man in dem für $\overset{x}{\varphi} fu$ gefundenen Ausdruck nur statt $u^{\alpha+m}$ im Allgemeinen $P^{\alpha+m}_{\alpha+n}$, so lange $m \leqq n$, zu setzen braucht, wodurch man den gesuchten Coefficienten von $u^{\alpha+n}$ in $\overset{x}{\varphi} f \Pi u$ erhält:

$$\text{C)} \qquad \sum_{\{\alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \leq \alpha_{x+1} \leq \alpha+n\}\,*)} V_{\alpha_1} U^{\alpha_1}_{\alpha_2} U^{\alpha_2}_{\alpha_3} \cdots U^{\alpha_x}_{\alpha_{x+1}} P^{\alpha_{x+1}}_{\alpha+n}.$$

7.

Wenn man mit $\overset{0}{\Delta^m fu}$ das 1te Glied der $m$ten Differenzenreihe der Reihe

$$\overset{0}{fu}(=u), \overset{1}{fu}, \overset{2}{fu}, \overset{3}{fu}, \text{ cet.}$$

bezeichnet, so findet man nach der gemeinen Interpolationsformel das x-te (oder vielmehr das $(x+1)$-te) Glied der vorgelegten Reihe

$$\overset{x}{fu} = u + x_1 \overset{0}{\Delta fu} + x_2 \overset{0}{\Delta^2 fu} + x_3 \overset{0}{\Delta^3 fu} + x_4 \overset{0}{\Delta^4 fu} + \text{cet.},$$

wo, wie bei Tralles

$$x_m = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}.$$

Bezeichnet man allgemein den Coefficienten von u^n in $\overset{x}{fu}$ mit $\overset{x}{fu_n}$, und die $m$te Differenz der Reihe

$$\overset{0}{fu_n}, \overset{1}{fu_n}, \overset{2}{fu_n}, \overset{3}{fu_n}, \ldots, \overset{m}{fu_n}$$

mit $\overset{0}{\Delta^m fu_n}$, so hat man auf gleiche Weise für $n > 1$:

$$\overset{x}{fu_n} = x \overset{0}{\Delta fu_n} + x_2 \overset{0}{\Delta^2 fu_n} + x_3 \overset{0}{\Delta^3 fu_n} + x_4 \overset{0}{\Delta^4 fu_n} + \text{cet.}$$

Wir fanden aber aus der Formel A) für die ursprüngliche Reihe

$$\overset{0}{fu_n}, \overset{1}{fu_n}, \overset{2}{fu_n}, \overset{3}{fu_n}, \text{ cet.}$$

---

*) Die untergesetzte Bedingung soll hier die Bedeutung haben, daß von den Elementen

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_x, \alpha+n$$

jedes vom folgenden abgezogen, 0 oder eine ganze positive Zahl zum Rest läßt. Da aber für andre Werthe der Elemente, die unter dem Summenzeichen begriffnen Ausdrücke keinen Sinn haben, so brauchte bloß angesagt zu werden, daß das Zeichen Σ alle dergleichen möglichen Ausdrücke summirt bedeute.

die Werthe:

$$0,\ U^1_n,\ \sum_{\{1 \leq a_1 \leq n\}} U^1_{a_1} U^{a_1}_n,\ \sum_{\{1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_n\}} U^1_{a_1} U^{a_1}_{a_2} U^{a_2}_{a_n}.\ \text{cet.}$$

8.

Die Differenzen $\overset{0}{\Delta} f u_n$, $\overset{0}{\Delta^2} f u_n$, $\overset{0}{\Delta^3} f u_n$, $\overset{0}{\Delta^4} f u_n$, cet. geben merkwürdige Ausdrücke, wenn $U^1_1 = 1$, und also auch allgemein $U^m_m = 1$, welchen Fall Tralles zuerst besonders betrachtet hat. Man bemerkt nämlich, daß in diesem Fall

das 2te Glied die Fälle des 3ten ausdrückt, wo $\alpha_1 = n$;
das 3te Glied die Fälle des 4ten ausdrückt, wo $\alpha_2 = n$;
cet.

so daß man, um die 1ten Differenzen zu erhalten, bloß die untergesetzten Bedingungen so weit zu ändern braucht, daß man in den verschiedenen Gliedern statt

$$\alpha_1 \leqq n,\ \alpha_2 \leqq n,\ \text{cet.}$$
$$\text{resp.}\quad \alpha_1 < n,\ \alpha_2 < n,\ \text{cet.}$$

setzt; indem die Fälle, wo in den verschiedenen Gliedern $\alpha_1 = n$, $\alpha_2 = n$, cet. eben durch das Abziehen wegfallen.

Hiernach wird die 1te Differenzenreihe:

$$U^1_n,\ \sum_{\{1 \leq a_1 < n\}} U^1_{a_1} U^{a_1}_n,\ \sum_{\{1 \leq a_1 \leq a_2 < n\}} U^1_{a_1} U^{a_1}_{a_2} U^{a_2}_n,\ \text{cet.}$$

Man bemerkt hier sogleich wieder, daß

das 1te Glied die Fälle des 2ten enthält, wo $1 = \alpha$,
das 2te Glied die Fälle des 3ten enthält, wo $\alpha_1 = \alpha_2$,
cet.

so daß durch das Abziehen resp. diese Fälle fortfallen, und man die 2te Differenzreihe erhält:

$$\sum_{\{1 < a_1 < n\}} U^1_{a_1} U^{a_1}_n,\ \sum_{\{1 \leq a_1 < a_2 < n\}} U^1_{a_1} U^{a_1}_{a_2} U^{a_2}_n,\ \text{cet.}$$

Hiernach sieht man, wie das 1te Glied der 3ten Differenzreihe wird:

$$\sum_{\{1 < a_1 < a_2 < n\}} U^1_{a_1} U^{a_1}_{a_2} U^{a_2}_n,$$

und allgemein das 1te Glied der $m$ten Differenzreihe, oder

$$\overset{0}{\Delta^m} f u_n = \sum_{\{1 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < n\}} U^1_{a_1} U^{a_1}_{a_2} U^{a_2}_{a_3} \cdots U^{a_{m-1}}_n.$$

Man erhält demnach die Coefficienten von u^n in $\overset{x}{f} u$ oder

$$\text{D)}\qquad \overset{x}{f} u_n = x U^1_n + x_2 \sum_{\{1 < a_1 < n\}} U^1_{a_1} U^{a_1}_n + x_3 \sum_{\{1 < a_1 < a_2 < n\}} U^1_{a_1} U^{a_1}_{a_2} U^{a_2}_n + \text{cet.}$$

Ganz durch dieselbe Methode findet man den Coefficienten von u^{a+n} in $\varphi \overset{x}{f} \Pi u$, wenn $U^1_1 = 1$:

$$\text{E)}\qquad \sum_{\{a \leq a_1 \leq a+n\}} V_{a_1} P^{a_1}_{a+n} + x \sum_{\{a \leq a_1 < a_2 \leq a+n\}} V_{a_1} U^{a_1}_{a_2} P^{a_2}_{a+n} + x_2 \sum_{\{a \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq a+n\}} V_{a_1} U^{a_1}_{a_2} U^{a_2}_{a_3} P^{a_3}_{a+n}$$
$$\cdots + \cdots + x_{n+1} V_a U^a_{a+1} U^{a+1}_{a+2} U^{a+2}_{a+3} \cdots U^{a+n-1}_{a+n-1} U^{a+n}_{a+n} P^{a+n}_{a+n}.$$

9.

Tralles setzt zuerst

$$fu = u + bu^2 + cu^3 + du^4 + eu^5 + fu^6 + \text{ cet.}$$

und findet

$$\overset{x}{f}u = u + bxu^2 + (cx + 2b^2 \cdot x_2)\, u^3 + \left\{ \begin{array}{l|l} dx + 5bc & x_2 + 6b^3 x_3 \\ \quad + \; b^3 & \end{array} \right\} u^4$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l|l|l} ex + 6bd & x_2 + 26b^2 e & x_3 + 24b^4 x_4 \\ \quad + 3c^2 & \quad + 10b^4 & \\ \quad + 5b^2 c & & \end{array} \right\} u^5$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} fx + 7be & x_2 + 36b^2 d & x_3 + 154b^3 c & x_4 + 120b^5 x_5 \\ \quad + 7cd & \quad + 35bc^2 & \quad + \; 86b^5 & \\ \quad + 8b^2 d & \quad + 71b^3 c & & \\ \quad + 7bc^2 & \quad + \; 8b^5 & & \\ \quad + \; b^3 c & & & \end{array} \right\} u^6$$

$$+ \cdots$$

Aus der Formel D) findet man leicht folgende recurrirende Bildungsweise dieser Ausdrücke. Bezeichnet man nämlich mit (m, n) die Terme, welche im Coefficienten von u^n in x_m multiplicirt sind, so hat man

$$(m, n) = U_n^{n-1}(m-1,\ n-1) + U_n^{n-2}(m-1,\ n-2)$$
$$+ U_n^{n-3}(m-1,\ n-3) + \cdots + U_n^{m}(m-1,\ m).$$

10.

Aber die Formel D) giebt auch ein leichtes Mittel, die Gesetze der in Tralles' Formel vorkommenden Ausdrücke von b, c, d, e, f, cet. unmittelbar anzugeben. Das 1te, was sich hier darbietet ist, daß

wenn man den Elementen

$$b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad \text{cet. resp.}$$
$$\text{die 1te, 2te, 3te, 4te, 5te, cet.}$$

Dimensionen beilegt, alle Ausdrücke im Coefficienten von u^n von der $(n-1)$ten Dimension sein müssen, solche aber alle vorkommen.

Um ferner den Zahlencoefficient jedes Terms zu finden, dienen folgende Operationen:

I. *Man zerlege jeden Term, der im Coefficienten von u^n in x_m multiplicirt ist, so in m Factoren, daß man zum 1ten Factor immer ein einfaches Element nimmt, die Zahl der einfachen Elemente jedes folgenden Factors aber immer kleiner als die Zahl der Dimensionen aller vorhergehenden Factoren, ihr gleich oder höchstens um 1 größer ist. Alle Terme, wo man dieses kann, finden sich in x_m multiplicirt und umgekehrt. Jeder solcher Term besteht also wenigstens aus m Factoren.*

II. *Ist nun die Zahl der einfachen Elemente eines Factors p, die Zahl der Dimensionen aller vorhergehenden l, wo $l + 1 \geqq p$, so multiplicire man den Factor mit a^{l+1-p}, wo a als von keiner Dimension angesehn wird, so daß also die Zahl der einfachen Elemente nun gerade $l + 1$ beträgt. Jeden so mit der gehörigen Potenz von a multiplicirten Factor wollen wir einen vollständigen nennen.*

III. *Hierauf gebe man jedem vollständigen Factor die Versetzungszahl seiner Elemente, und multiplicire in jeder Zerfällung solche $m - 1$ Versetzungszahlen (denn der 1te Factor*

als einfaches Element hat immer die Versetzungszahl 1) *in einander. Die Summe der Producte, die man auf diese Weise aus allen möglichen Zerfällungen eines Terms, die durch die Operation* I *erhalten werden, findet, ist sein Zahlencoefficient.*

Man kann hierzu noch folgende 2 Bemerkungen fügen, daß, wenn man den Elementen

a, b, c, d, e, f, cet. resp.

die 1te, 2te, 3te, 4te, 5te, 6te, cet.

Dimension beilegt,

1) *jeder vollständige Factor so viel Elemente erhalten wird, wie der unmittelbar vorhergehende vollständige Factor Dimensionen;*
2) *der letzte Factor immer n Dimensionen haben wird, wenn sich nämlich, wie vorausgesetzt worden, der Term im Coefficienten von u^n vorfindet.*

11.

Um das vorhergehende deutlich zu machen, wollen wir die Zahlencoefficienten der Terme, die sich im Coefficienten von u^6 in Tralles Formel vorfinden, nach der angegebenen Methode im Folgenden berechnen, wo in den 3 verschiedenen Columnen die 3 angegebenen Operationen ausgeführt sind.

A. Terme, die in x_2 multiplicirt sind

1) be

$b \cdot e$	$b \cdot ae$	$1 \cdot 2$	$= 2$
$e \cdot b$	$e \cdot a^4 b$	$1 \cdot 5$	$= 5$
			7

2) cd

$c \cdot d$	$c \cdot a^2 d$	$1 \cdot 3$	$= 3$
$d \cdot c$	$d \cdot a^3 c$	$1 \cdot 4$	$= 4$
			7

3) $b^2 d$

$b \cdot bd$	$b \cdot bd$	$1 \cdot 2$	$= 2$
$d \cdot b^2$	$d \cdot a^2 b^2$	$1 \cdot 6$	$= 6$
			8

4) bc^2

$b \cdot c^2$	$b \cdot c^2$	$1 \cdot 1$	$= 1$
$c \cdot bc$	$c \cdot abc$	$1 \cdot 6$	$= 6$
			7

5) $b^3 c$

$c \cdot b^3$	$c \cdot b^3$	$1 \cdot 1$	$= 1$

B. Terme, die in x_3 multiplicirt sind

1) b^2d

$b\cdot b\cdot d$	$b\cdot ab\cdot a^2d$	$1\cdot 2\cdot 3 = 6$
$b\cdot d\cdot b$	$b\cdot ad\cdot a^4b$	$1\cdot 2\cdot 5 = 10$
$d\cdot b\cdot b$	$d\cdot a^3b\cdot a^4b$	$1\cdot 4\cdot 5 = 20$
		36

2) bc^2

$c\cdot c\cdot b$	$c\cdot a^2c\cdot a^4b$	$1\cdot 3\cdot 5 = 15$
$c\cdot b\cdot c$	$c\cdot a^2b\cdot a^3c$	$1\cdot 3\cdot 4 = 12$
$b\cdot c\cdot c$	$b\cdot ac\cdot a^3c$	$1\cdot 2\cdot 4 = 8$
		35

3) b^3c

$b\cdot b\cdot bc$	$b\cdot ab\cdot abc$	$1\cdot 2\cdot 6 = 12$
$b\cdot bc\cdot b$	$b\cdot bc\cdot a^4b$	$1\cdot 2\cdot 5 = 10$
$b\cdot b^2\cdot c$	$b\cdot b^2\cdot a^3c$	$1\cdot 1\cdot 4 = 4$
$b\cdot c\cdot b^2$	$b\cdot ac\cdot a^2b^2$	$1\cdot 2\cdot 6 = 12$
$c\cdot b\cdot b^2$	$c\cdot a^2b\cdot a^2b^2$	$1\cdot 3\cdot 6 = 18$
$c\cdot b^2\cdot b$	$c\cdot ab^2\cdot a^4b$	$1\cdot 3\cdot 5 = 15$
		71

4) b^5

$b\cdot b^2\cdot b^2$	$b\cdot b^2\cdot a^2b^2$	$1\cdot 1\cdot 6 = 6$
$b\cdot b\cdot b^3$	$b\cdot ab\cdot b^3$	$1\cdot 2\cdot 1 = 2$
		8

C. Terme, die in x_4 multiplicirt sind

1) b^3c

$b\cdot b\cdot b\cdot c$	$b\cdot ab\cdot a^2b\cdot a^3c$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$
$b\cdot b\cdot c\cdot b$	$b\cdot ab\cdot a^2c\cdot a^4b$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 30$
$b\cdot c\cdot b\cdot b$	$b\cdot ac\cdot a^3b\cdot a^4b$	$1\cdot 2\cdot 4\cdot 5 = 40$
$c\cdot b\cdot b\cdot b$	$c\cdot a^2b\cdot a^3b\cdot a^4b$	$1\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 60$
		154

2) b^5

$b\cdot b\cdot b\cdot b^2$	$b\cdot ab\cdot a^2b\cdot a^2b^2$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 6 = 36$
$b\cdot b\cdot b^2\cdot b$	$b\cdot ab\cdot ab^2\cdot a^4b$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 30$
$b\cdot b^2\cdot b\cdot b$	$b\cdot b^2\cdot a^3b\cdot a^4b$	$1\cdot 1\cdot 4\cdot 5 = 20$
		86

D. Terme, die in x_5 multiplicirt sind.

b^5

$b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b$	$b\cdot a^1b\cdot a^2b\cdot a^3b\cdot a^4b$	$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

12.

Aber alle solche combinatorischen Bildungsweisen haben für den Analysten nur ein sehr untergeordnetes Interesse, wie Tralles in der trefflichen Abhandlung

Von den Werthen der Producte zu bestimmten Zeigezahlen ihrer Factoren (vorgel. den 14ten Aug. 1817)[18])

bemerkt. Gleichwohl dürfte es der Mühe werth sein, auf ähnliche Weise die allgemeinere Formel bei Tralles zu erörtern, was er ausdrücklich bemerkt, in seiner Abhandlung nicht zu beabsichtigen, und wozu dieser Versuch eine Vorarbeit sein dürfte. Auch scheint der Fall, wo fu mit dem Term $-u$ anhebt, besondre Symptome zu haben, und einer nähern Beachtung würdig.

Überhaupt scheint mir die Form, welche Tralles der Function fu giebt, nicht diejenige zu sein, welche die glücklichsten Resultate liefert.

Wichtiger müssen dem Analysten folgende ganz allgemeine, rein analytische Betrachtungen sein.

13.

Es wird nämlich nach Tralles' einleitenden Bemerkungen nicht mehr verwundern, wenn man davon spricht, einen Ausdruck wie $\overset{x}{f}u$ nach x zu differenziiren. Es sei nun $\overset{x}{f}u$ als Function von x und u betrachtet, $= \varphi(x, u)$, und man bezeichne nach Lagrange[19]) die sogenannte 1te Ableitung von $\varphi(x, u)$ nach x mit $\varphi'(x, u)$, nach u mit $\varphi_{,}(x, u)$; so weiß man, daß wenn V irgend eine Function von $\varphi(x, u)$ ist, und man wieder die 1te Ableitung von V nach x mit V', nach u mit $V_{,}$ bezeichnet, immer sein wird:

$$\frac{\varphi_{,}(x, u)}{\varphi'(x, u)} = \frac{V_{,}}{V'}.$$

Ist daher $V = \overset{n}{f}\varphi(x, u) = \overset{nx}{f}fu = \overset{n+x}{f}u = \varphi(x + n, u)$, so hat man:

$$\frac{\varphi_{,}(x, u)}{\varphi'(x, u)} = \frac{\varphi_{,}(x + n, u)}{\varphi'(x + n, u)}.$$

Da also der Ausdruck $\frac{\varphi_{,}(x, u)}{\varphi'(x, u)}$ unverändert bleibt, wenn man darin $x + n$ statt x setzt, so folgt, daß er überhaupt kein x enthalte, also eine bloße Function von u sei.

14.

Vorstehendes giebt ein leichtes Mittel, die Gleichung

$$\varphi(x, u) = \overset{x}{f}u = C,$$

wo C eine Constante bedeutet, nach x aufzulösen. Denn man erhält aus dieser Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\varphi_{,}(x, u)}{\varphi'(x, u)}.$$

Setzt man nun $\frac{\varphi_{,}(x, u)}{\varphi'(x, u)}$, was eine bloße Function von u ist, $= U$, so ergiebt sich

$$x = -\int U \partial u + \text{Const.}$$

[18]) *Joh. Gg. Tralles*, Von den Werthen der Produkte zu bestimmten Summen der Zeigezahlen ihrer Faktoren; Math. Abh. der Akad. Wiss. zu Berlin, 1816/17, 56—64.

[19]) *J. L. Lagrange*, Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, ..., Paris ²1813.

15.

Die willkührliche Constante, welche von C abhängen wird, kann man auf folgende Weise bestimmen:

Da $\overset{x}{f}u = C$ ebenfalls die Gleichung $\frac{\partial x}{\partial u} = -U$ integrirt, so muß, wenn man $\int U \partial u = Fu$ setzt, $\overset{x}{f}u$ eine Function von $x + Fu$ sein, so daß man setzen kann

$$\overset{x}{f}u = \Psi(x + Fu).$$

Um die Natur der Function Ψ zu erkennen, setze man $x = 0$, wodurch man erhält $\overset{0}{f}u = u = \Psi Fu$, welches zeigt, daß Ψ die umgekehrte Function zu F ist, oder daß $\Psi = \overset{-1}{F}$. Man hat daher $\overset{x}{f}u = \overset{-1}{F}(x + Fu)$; und es giebt die Gleichung

$$\overset{x}{f}u = \overset{-1}{F}(x + Fu) = C$$

$$x + Fu = FC \text{ oder}$$

$$x = FC - Fu.$$

Man hätte freilich diese Constantenbestimmung von vorn herein gefunden, wenn man bedenkt, daß aus der Gleichung $\overset{x}{f}u = C$ folgt, daß für $x = 0$ man $u = C$ erhalten muß; aber es war uns mehr um die Betrachtungen zu thun, die wir bei dieser Gelegenheit angestellt haben, als um die Constantenbestimmung.

16.

Denn die Gleichung $\overset{x}{f}u = \overset{-1}{F}(x + Fu)$ scheint von hohem Interesse zu sein. Daß $\overset{-1}{F}(x + Fu)$ wirklich der allgemeine Ausdruck einer x mal wiederholten Function von u ist, läßt sich so erkennen.

Denn so wie man dem Ausdruck $\overset{x}{f}u$ eine allgemeine Bedeutung geben will, muß man die beschränkte Entstehungsart verlaßen, und sich nach einer neuen Definition umsehn. Diese aber ist folgende.

„$\overset{x}{f}u$ bedeutet eine solche Function von x und u — $\varphi(x, u)$ —, daß wenn man darin statt u eine solche Function von y, wie $\varphi(x, u)$ von x ist, — $\varphi(y, u)$ — substituirt, man die gleiche Function von $x + y$ erhält; und die für $x = 0$, u giebt.“

Solche Function ist aber $\overset{-1}{F}(x + Fu)$. Denn wenn man darin $\overset{-1}{F}(y + Fu)$ statt u substituirt, so erhält man

$$\overset{-1}{F}(x + F\overset{-1}{F}(y + Fu)) = \overset{-1}{F}(x + y + Fu), \text{ da}$$

$$F\overset{-1}{F}(y + Fu) = y + Fu.$$

17.

Wir haben aber auch oben gezeigt, wie man Fu aus $\overset{x}{f}u$ findet. Denn es war gesetzt worden $Fu = \int U \partial u$, U aber der Quotient der 1ten Ableitung von $\overset{x}{f}u$ nach u, dividirt durch die 1te Ableitung von $\overset{x}{f}u$ nach x. Da dieser Quotient kein x enthält, so kann man

im Zähler und Nenner $x = 0$ setzen. Es wird aber $\varphi_{,}(x, u)$ für $x = 0$, so viel wie $\varphi_{,}(0, u)$, oder da $\varphi(0, u) = \overset{0}{f}u = u$, $\varphi_{,}(x, u) = \varphi_{,}(0, u) = 1$. Die Ableitung nach x ist für $x = 0$ so viel wie

$$\frac{\varphi(x, u) - \varphi(0, u)}{x} = \frac{\overset{x}{f}u - u}{x},$$

so daß man erhält $U = \dfrac{x}{\overset{x}{f}u - u}$, wenn man, nachdem man mit x gehoben, $x = 0$ setzt.

Leichter findet man fu aus Fu, denn aus der Formel

$$\overset{x}{f}u = \overset{-1}{F}(x + Fu) \text{ ergiebt sich } fu = \overset{-1}{F}(1 + Fu).$$

18.

Aus unsrer Formel $\overset{x}{f}u = \overset{-1}{F}(x + Fu)$ lassen sich durch schickliche Annahme von F Functionen finden, die wiederholt höchst elegante einfache Ausdrücke geben. Setzt man z. B. $Fu = e^u$, so wird $\overset{-1}{F}u = \log u$, und es wird $\overset{x}{f}u = \log(x + e^u)$, also $fu = \log(1 + e^u)$. Die Function $\log(1 + e^u)$ ist also so beschaffen, daß sie x mal wiederholt $\log(x + e^u)$ giebt. Die umgekehrte Function von $\log(x + e^u)$ ist also z. B. $\log(-x + e^u)$.

Setzt man $Fu = \operatorname{Arc}\sin u$, also $\overset{-1}{F}u = \sin u$, so wird

$$\overset{x}{f}u = \overset{-1}{F}(x + Fu) = \sin(x + \operatorname{Arc}\sin u) = \sin x \cos \operatorname{Arc}\sin u + \cos x \sin \operatorname{Arc}\sin u,$$

oder da $\cos \operatorname{Arc}\sin u = \sqrt{1 - u^2}$, $\sin \operatorname{Arc}\sin u = u$,

$$\overset{x}{f}u = \sqrt{1 - u^2} \cdot \sin x + u \cos x.$$

Setzt man hier wieder statt x, um die umgekehrte Function zu haben, $-x$, so findet man, da $\sin -x = -\sin x$, daß $u \cos x \pm \sqrt{1 - u^2} \cdot \sin x$ zwei Functionen von u sind, von denen die eine die umgekehrte der andern ist.

Da für $x = 2\pi$, 4π, 6π, cet. $u \cos x \pm \sqrt{1 - u^2} \cdot \sin x$ immer u wird, so hat man hier ein Beispiel von periodischen Functionen, wo der Index der Periode transcendent ist. Er ist nämlich für

$$u \cos \alpha \pm \sqrt{1 - u^2} \cdot \sin \alpha$$

die transcendente Zahl $\dfrac{2\pi}{\alpha}$.

Unter periodischen Functionen werden aber solche verstanden, wo sich für x eine solche Zahl angeben läßt, daß $\overset{x}{f}u = u$ wird, welche Functionen vorzüglich von dem berühmten Babbage[12]) untersucht worden sind. Da diese Abhandlung nur den Zweck hat, sich an die Trallessche anzuschließen, Tralles aber die periodischen Functionen durchaus nicht berührt hat, so versparen wir mehrere interessante Resultate über diese auf eine andre Gelegenheit. —

Berlin, den 20ten October 1825

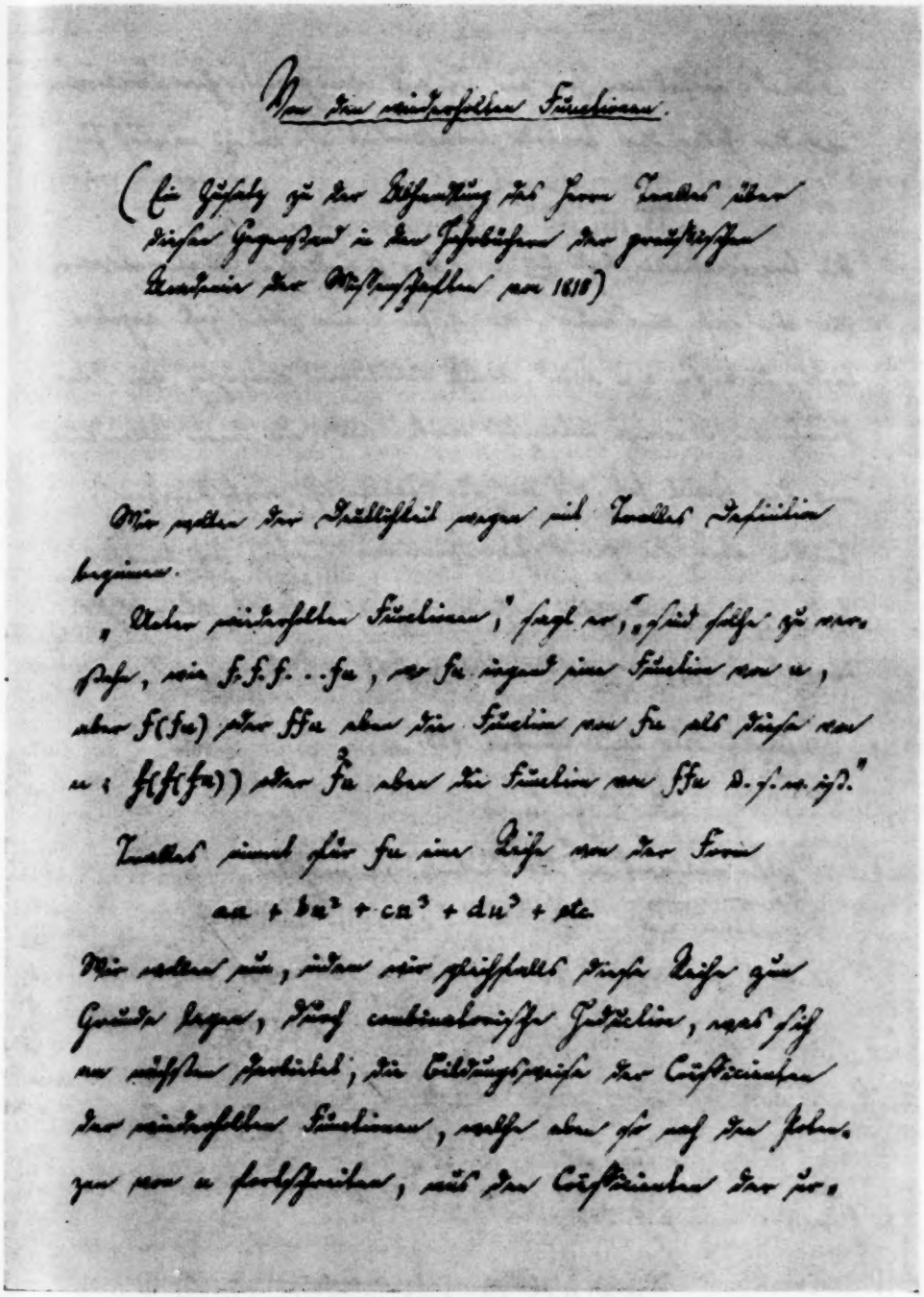
Dr. C. G. Jacobi
Privatdocent an der Berliner Universität.

Namenverzeichnis.

**Babbage*, Charles, 1792—1871, Mathem.
Biermann, Kurt-Reinhard, geb. 1919, Verf. vorsteh. Abh.
Bonpland, Aimé-J. A. *Goujaud-*, 1773—1858, Botaniker.
Borchardt, Carl Wilhelm, 1817—1880, Mathem.
Clebsch, R. Fr. Alfred, 1833—1872, Mathem.
Dirichlet, J. Peter Gustav *Lejeune*, 1805—1859, Mathem.
Dirksen, Enno Heeren, 1792—1868, Mathem.
Encke, Johann Franz, 1791—1865, Astron.
Euler, Leonhard, 1707—1783, Mathem.
Eytelwein, Johann Albert, 1764—1849, Bautechn.
Fischer, Ernst Gottfried, 1754—1831, Mathem.
Gauß, Carl Friedrich, 1777—1855, Mathem.
Goethe, Johann Wolfgang v., 1749—1832.
Gruson (Grüson), Jean Philippe (Johann Philipp), 1768—1857, Mathem.
Herschel, Friedrich Wilhelm, 1738—1822, Astron.
Hindenburg, Karl Friedrich, 1741—1808, Mathem.
Humboldt, Fr. W. H. Alexander v., 1769—1859, Naturforsch.
**Jacobi*, Carl Gustav Jacob, 1804—1851, Mathem.
Klemm, Friedrich, geb. 1904, Techn.-Hist.
Koenigsberger, Leo, 1837—1921, Mathem.
Kronecker, Leopold, 1823—1891, Mathem.
Kummer, Ernst Eduard, 1810—1893, Mathem.
**Lagrange*, Joseph-Louis Comte de, 1736—1813, Mathem.
Lambert, Johann Heinrich, 1728—1777, Mathem.
Neumann, Franz Ernst, 1798—1895, mathem. Phys.
Oltmanns, Jabbo, 1783—1833, Astron.
Poselger, Friedrich Theodor, 1771—1838, Mathem.
**Rothe*, Heinrich August, 1773—1842, Mathem.
**Schweins*, Franz Ferdinand, 1780—1856, Mathem.
Sudhoff, Karl Fr. Jak., 1853—1938, Med.-Hist.
Toepfer, Heinrich August, 1758—1833, Mathem.
**Tralles*, Johann Georg, 1763—1822, Mathem.
Weierstraß, Karl Th. W., 1815—1897, Mathem.
Zach, Franz Xaver Freiherr v., 1754—1832, Astron.

* = in Jacobis Abh. vorkommende Namen.

Eingegangen 24. Juni 1960.



Von den wiederholten Functionen.

(Ein Zusatz zu der Abhandlung des Herrn Tralles über diesen Gegenstand in den Jahrbüchern der preußischen Academie der Wissenschaften von 1818)

Wir wollen der Deutlichkeit wegen mit Tralles Definition beginnen.

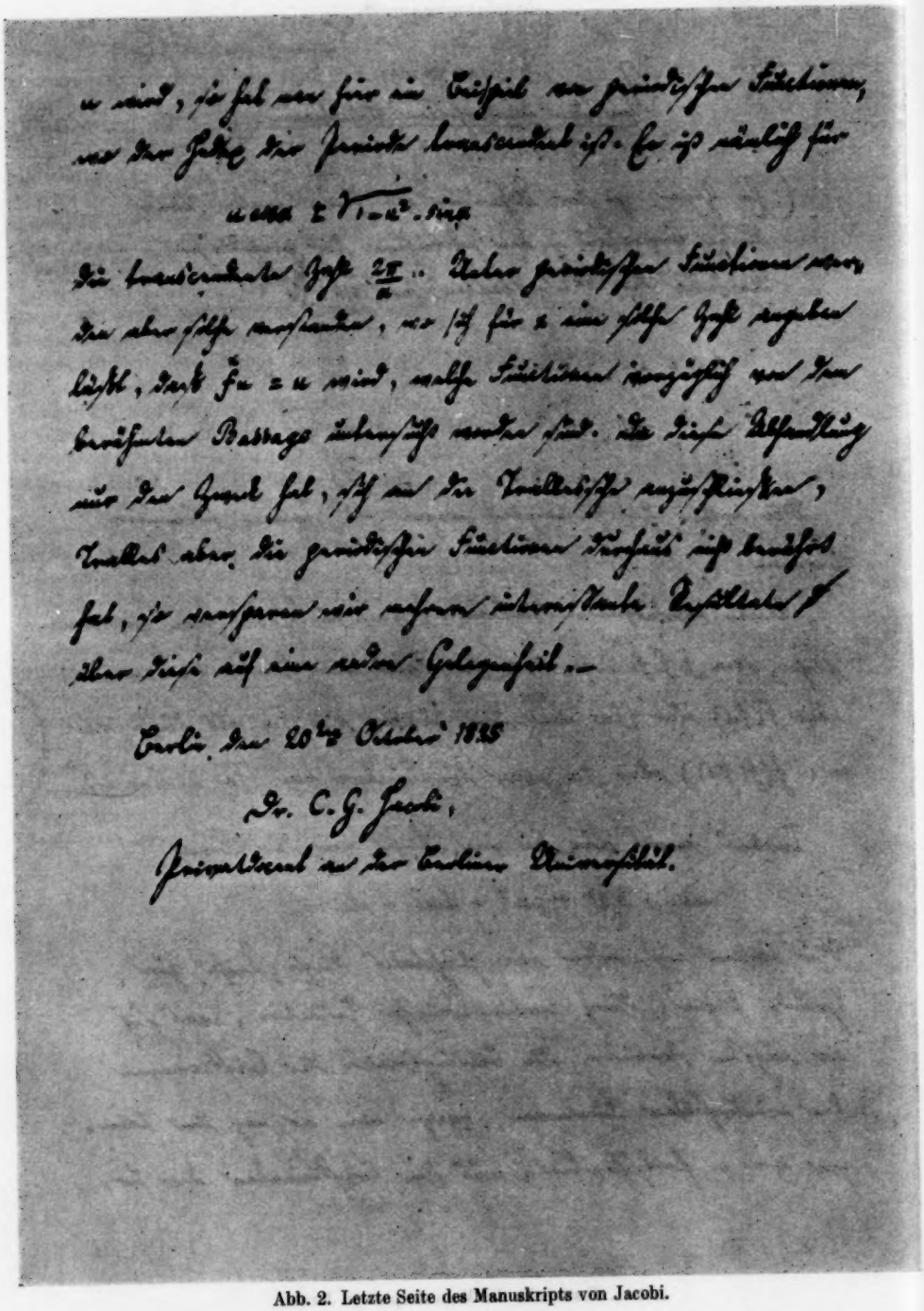
„Unter wiederholten Functionen," sagt er, „sind solche zu verstehen, wie $f.f.f. \ldots fu$, wo fu irgend eine Function von u, aber $f(fu)$ oder ffu eben die Function von fu als diese von u; $f(f(fu))$ oder $\overset{3}{f}u$ eben die Function von ffu u. s. w. ist."

Tralles nimmt für fu eine Reihe von der Form

$$au + bu^2 + cu^3 + du^3 + \text{etc.}$$

Wir wollen nun, indem wir gleichfalls diese Reihe zum Grunde legen, durch combinatorische Induction, was sich am nächsten darbietet, die Bildungsweise der Coëfficienten der wiederholten Functionen, welche eben so nach den Potenzen von u fortschreiten, aus den Coëfficienten der ur-

Abb. 1. Erste Seite des Manuskripts von Jacobi.



u wird, so hat man hier ein Beispiel von periodischen Functionen, wo der Index der Periode transcendent ist. Es ist nämlich für

$$u \cos\alpha \pm \sqrt{1-u^2}\,.\sin\alpha$$

die transcendente Zahl $\frac{2\pi}{\alpha}$. Unter periodischen Functionen werden aber solche verstanden, wo sich für x eine solche Zahl angeben läßt, daß $\overset{x}{f}u = u$ wird, welche Functionen vorzüglich von dem berühmten Bassage untersucht worden sind. Da diese Abhandlung nur den Zweck hat, sich an die Trallessche anzuschließen, Tralles aber die periodischen Functionen durchaus nicht berührt hat, so versparen wir mehrere interessante Resultate über diese auf eine andre Gelegenheit. –

Berlin den 20ten October 1825

Dr. C. G. Jacobi,

Privatdocent an der Berliner Universität.

Abb. 2. Letzte Seite des Manuskripts von Jacobi.

On the Existence Proof of the Flow in the Boundary Layer in a Compressible Fluid. II[7]).

By *M. Z. v. Krzywoblocki* at East Lansing (Mich., U.S.A.).

3. 3. Successive Approximations. In this section the system of equations given above describing steady compressible flow in continuum will be solved by successive approximations. Instead of solving the original system (2. 1. 1) — (2. 1. 6), an equivalent system of equations derived in section 3. 2 will be solved, i. e. the equations (2. 1. 6), (3. 2. 1. 15), (3. 2. 1. 17) — (3. 2. 1. 19), (3. 2. 1. 30), (3. 2. 2. 7).

It can be shown in an analogous manner, as was done in [7], 395—399, that, starting with (3. 2. 1. 30) and using the given boundary conditions, (3. 2. 1. 30) leads back to (3. 2. 1. 15) (equation for $p(\tau)$).

In the procedure of successive approximations the subscripts $1, 2, \ldots, n$ will denote the successive approximations. Another notation used is $(\varrho u)(\tau)$, etc., which means that the product of ϱu is a function of τ.

In the first approximation to $\Phi(\sigma^*)$, equation (3. 2. 1. 31), one sets the expression

$$(3.3.1)\quad \Phi_1(\sigma) = -2\left[\frac{\partial(\varrho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho W)}{\partial z}\right]_S - \frac{1}{2\pi}\int_T \left\{\frac{\partial G(\sigma,\tau')}{\partial x}\,\alpha_0 X' + \cdots\right\} d\tau'$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_T \left\{(x'-x)\,\frac{\partial G(\sigma,\tau')}{\partial x} + \cdots\right\}\left\{\frac{\partial(\alpha_0 X')}{\partial x'} + \frac{\partial(\alpha_0 Y')}{\partial y'} + \frac{\partial(\alpha_0 Z')}{\partial z'}\right\} d\tau'.$$

Analogously, one sets first approximations to the remaining functions, (3. 2. 1. 30), (3. 2. 1. 17) — (3. 2. 1. 19), (3. 2. 2. 7), considering (3. 2. 1. 30) as an equation of Fredholm's type (see (1. 8. 1)):

$$(3.3.2)\qquad p_1(\sigma) = \Phi_1(\sigma) + \int_S K_1(\sigma,\sigma')\,\Phi_1(\sigma')\,d\sigma' + p^0,$$

$$(3.3.3)\quad (\varrho u)_1(\tau) = (\varrho U)(\tau)$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int_T G(\tau,\tau')\left\{(x'-x)\left[\frac{\partial(\alpha_0 X')}{\partial x'} + \frac{\partial(\alpha_0 Y')}{\partial y'} + \frac{\partial(\alpha_0 Z')}{\partial z'}\right] + 2\,\alpha_0 X'\right\} d\tau'$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int_S \frac{\partial G(\tau,\sigma')}{\partial n'}\,(x-x')\,p_1'\,d\sigma',$$

. . . . . ,

. . . . . ,

applying (A. 2) to the last term in (3. 2. 1. 17), etc.,

$$(3.3.4)\quad (kT)_1(\tau) = (k\Theta)(\tau) - \frac{1}{4\pi}\int_T G(\tau,\tau')\left[\frac{c_v}{R}\left\{(\varrho u)_1' X' + (\varrho v)_1' Y' + (\varrho w)_1' Z'\right\}\right] d\tau',$$

[7]) Part I of this work see this journal **206** (1960), 175—191, Part III will be published in a later volume of this journal. References see at the end of Part I.

where α, ϱ, $\bar{\mu}$, k for the first approximations have been assumed constants α_0, ϱ_0, $\bar{\mu}_0$, k_0. In order to calculate functions T, $\bar{p}$, ϱ, u, v, w assume $k_0 = \text{const.} \neq 0$, and let $k_n = k(T_n) \neq 0$ and $\bar{\mu}_n = \bar{\mu}(T_n) \neq 0$ be bounded functions of T. Thus, from (3. 3. 4) one calculates $(kT)_1 = k_0 T_1$, whence by $\frac{(kT)_1}{k_0} = T_1$ one obtains $k_1 = k(T_1)$ and $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}(T_1)$. Next, $p_1(\tau)$ will be calculated from (3. 2. 1. 15) taken in the form

$$(3.\,3.\,5)\quad p_1(\tau) = -\frac{1}{4\pi}\int_T G(\tau,\tau')\left[\frac{\partial(\alpha_0 X')}{\partial x'} + \frac{\partial(\alpha_0 Y')}{\partial y'} + \frac{\partial(\alpha_0 Z')}{\partial z'}\right] d\tau' + \int_S \frac{\partial G(\tau,\sigma')}{\partial n'}\, p_1'(\sigma')\, d\sigma',$$

or, in similar fashion one could use also equation (3. 2. 1. 22) for the same purpose.

Furthermore, one calculates the pressure $\bar{p}$ using (3. 3. 5)

$$(3.\,3.\,6)\qquad \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x} = \frac{\bar{\mu}_1}{\varrho_0}\frac{\partial p_1}{\partial x},\quad \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial y} = \frac{\bar{\mu}_1}{\varrho_0}\frac{\partial p_1}{\partial y},\quad \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial z} = \frac{\bar{\mu}_1}{\varrho_0}\frac{\partial p_1}{\partial z}.$$

Multiplying equations (3. 3. 6) by dx, dy, dz, respectively, and adding

$$(3.\,3.\,7)\quad d\bar{p}_1 = \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial z}dz = \frac{\bar{\mu}_1}{\varrho_0}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}dx + \frac{\partial p_1}{\partial y}dy + \frac{\partial p_1}{\partial z}dz\right) = \frac{\bar{\mu}_1}{\varrho_0}dp_1.$$

Assume that the right hand side of (3. 3. 7) is bounded where the validity of this assumption will be shown a posteriori. Hence $d\bar{p}_1$ is bounded, and since the integration is performed over the finite region $T + S$, $\bar{p}_1$ also is bounded. Similar procedure can be applied to the calculation of $\bar{\mu}$ from μ (see (3. 2. 1. 4)). Using the equation of state, ϱ_1 can be calculated:

$$(3.\,3.\,8)\qquad \varrho_1 = \frac{\bar{p}_1}{RT_1},\qquad T_1 \neq 0.$$

And, finally, the single functions u_1, v_1, w_1 will be obtained from (3. 3. 3) etc. with $(\varrho u)_1 \equiv \varrho_1 u_1$ whence

$$(3.\,3.\,9)\qquad u_1 = \frac{(\varrho u)_1}{\varrho_1}, \ldots.$$

Since the derivatives of the unknown functions u, v, w, T, $\bar{p}$, etc., were neglected in the first approximate equations (3. 3. 1) — (3. 3. 5) it is seen that this approximation gives a solution of the reduced system of equations obtained from (3. 2. 2. 8), (3. 2. 2. 9) with $B = \alpha_0 X$, etc.:

$$(3.\,3.\,10)\qquad \begin{aligned} &-\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2(\varrho u) + \alpha_0 X = 0, && \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0,\\ &-\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla^2(\varrho v) + \alpha_0 Y = 0, && \bar{p} = \varrho RT,\\ &-\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla^2(\varrho w) + \alpha_0 Z = 0, && \nabla^2(k_0 T) = \frac{c_v}{R}[\varrho u X + \varrho v Y + \varrho w Z]. \end{aligned}$$

The existence of solutions of (3. 3. 10) has been shown in section 3. 2. 2. Furthermore, it(is seen that $(\varrho u)_1(\tau)$, $(\varrho v)_1(\tau)$, $(\varrho w)_1(\tau)$ are independent of p^0. Moreover, $(\varrho u)_1$, $(\varrho v)_1$, $\varrho\, w)_1$, and $(kT)_1$ satisfy on S the prescribed boundary conditions $(\varrho u)_1 = \varphi$, $(\varrho v)_1 = \psi$, $(\varrho w)_1 = \chi$, $(kT)_1 = \pi$.

For the second approximation one sets:

$$(3.3.11)\qquad \Phi_2(\sigma) = -2\left[\frac{\partial(\varrho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho W)}{\partial z}\right]_S - \frac{1}{2\pi}\int_T \left\{\frac{\partial G(\sigma,\tau')}{\partial x} B_1' + \cdots\right\} d\tau'$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int_T \left\{(x'-x)\frac{\partial G(\sigma,\tau')}{\partial x} + \cdots\right\} A_1' d\tau',$$

$$(3.3.12)\qquad p_2(\sigma) = \Phi_2(\sigma) + \int_S K_2(\sigma,\sigma')\,\Phi_2(\sigma')\,d\sigma' + p^0,$$

$$(3.3.13)\qquad (\varrho u)_2(\tau) = (\varrho U)(\tau) + \frac{1}{8\pi}\int_T G(\tau,\tau')\,\{(x'-x)\,A_1' + 2B_1'\}\,d\tau'$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\int_S \frac{\partial G(\tau,\sigma')}{\partial n'}(x-x')\,p_2' d\sigma',$$

. . . . . ,

. . . . . ,

$$(3.3.14)\qquad (kT)_2(\tau) = (k\Theta)(\tau) - \frac{1}{4\pi}\int_T G(\tau,\tau')\,E_1' d\tau',$$

where $B_1, \ldots, A_1, E_1$ are determined by using $u_1, v_1, w_1, \bar{p}_1, T_1, \varrho_1, \bar{\mu}_1, k_1$ from the first approximations. The functions $u_2, \ldots, k_2$ will be calculated by a procedure similar to the one used above, i. e. T_2 is calculated with the use of $k_1 = k(T_1)$. $p_2(\tau)$ is calculated from

$$p_2(\tau) = -\int_T G(\tau,\tau')\,A_1' d\tau' + \int_S \frac{\partial G(\tau,\sigma')}{\partial n'}\,p_2'(\sigma')\,d\sigma'.$$

$\bar{p}_2$ is calculated with the use of the coefficient $\frac{\bar{\mu}_2(T_2)}{\varrho_1}$, (see (3. 3. 7)). All the other single functions ϱ_2, u_2, v_2, w_2 are calculated using the second approximation results.

It is seen again that $(\varrho u)_2(\tau)$, $(\varrho v)_2(\tau)$, $(\varrho w)_2(\tau)$ are independent of p^0 and, when approaching S, satisfy with $(kT)_2$, the prescribed boundary conditions $(\varrho u)_2 = \varphi$, $(\varrho v)_2 = \psi$, $(\varrho w)_2 = \chi$, $(kT)_2 = \pi$.

The functions (ϱu), (ϱv), ... are again the solutions of (3. 2. 2. 8), (3. 2. 2. 9) with B, C, D given by (3. 2. 1. 11), and E given by (3. 2. 2. 6), in forms defined below (3. 3. 14).

The procedure of approximations can be continued. In the n-th approximation one has

$$(3.3.15)\qquad \Phi_n(\sigma) = -2\left[\frac{\partial(\varrho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho W)}{\partial z}\right]_S - \frac{1}{2\pi}\int_T \left\{\frac{\partial G(\sigma,\tau')}{\partial x} B_{n-1}' + \cdots\right\} d\tau'$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{(x'-x)\frac{\partial G(\sigma,\tau')}{\partial x} + \cdots\right\} A_{n-1}' d\tau',$$

$$(3.3.16)\qquad p_n(\sigma) = \Phi_n(\sigma) + \int_S K_n(\sigma,\sigma')\,\Phi_n(\sigma')\,d\sigma' + p^0,$$

$$(3.3.17)\qquad (\varrho u)_n(\tau) = (\varrho U)(\tau) + \frac{1}{8\pi}\int_T G(\tau,\tau')\,\{(x'-x)\,A_{n-1}' + 2B_{n-1}'\}\,d\tau'$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\int_S \frac{\partial G(\tau,\sigma')}{\partial n'}(x-x')\,p_n' d\sigma'\,^{8)},$$

. . . . . ,

. . . . . ,

[8]) The functions $(\varrho u)_{n-1}(\tau), \ldots$, etc., certainly possess in T continuous fourth order derivatives satisfying H-condition, so that K_n possesses there first order derivatives satisfying H-condition. Similarly, the function $(kT)_{n-1}$ possesses in T continuous fourth order derivatives satisfying H-condition, so that E_n possesses there second order derivatives satisfying H-condition. Existence of second partial derivatives of Φ_n requires the existence of first derivatives of A_{n-1}' (see (3. 2. 1. 6) and below (3. 2. 1. 39)).

$$(3.3.18)\qquad (kT)_n(\tau) = (k\Theta)(\tau) - \frac{1}{4\pi}\int_T G(\tau,\tau')\,E'_{n-1}\,d\tau',$$

where $B_{n-1},\ldots,A_{n-1}$, E_{n-1} are determined by using $u_{n-1},\ldots,k_{n-1}$ from the $(n-1)$st approximation. The functions $u_n,\ldots,k_n$ must be determined by the method described above. In the $(n+1)$st approximation one has, similarly,

$$(3.3.19)\qquad \Phi_{n+1}(\sigma) = -2\left[\frac{\partial(\varrho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho V)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho W)}{\partial z}\right]_S - \frac{1}{2\pi}\int_T \left\{\frac{\partial G(\sigma,\tau')}{\partial x}B'_n + \cdots\right\} d\tau'$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_T \left\{(x'-x)\frac{\partial G(\sigma,\tau')}{\partial x} + \cdots\right\} A'_n\,d\tau',$$

$$(3.3.20)\qquad p_{n+1}(\sigma) = \Phi_{n+1}(\sigma) + \int_S K_{n+1}(\sigma,\sigma')\,\Phi_{n+1}(\sigma')\,d\sigma' + p^0,$$

$$(\varrho u)_{n+1}(\tau) = (\varrho U)(\tau) + \frac{1}{8\pi}\int_T G(\tau,\tau')\,\{(x'-x)\,A'_n + 2B'_n\}\,d\tau'$$

$$(3.3.21)\qquad + \frac{1}{8\pi}\int_S \frac{\partial G(\tau,\sigma')}{\partial n'}(x-x')\,p'_{n+1}\,d\sigma',$$

. . . . . ,

. . . . . ,

$$(3.3.22)\qquad (kT)_{n+1}(\tau) = (k\Theta)(\tau) - \frac{1}{4\pi}\int_T G(\tau,\tau')\,E'_n\,d\tau',$$

where $B_n,\ldots,A_n$, E_n are determined by using $u_n,\ldots,k_n$ from the n-th approximation. It is seen that the n-th and $(n+1)$st approximations are solutions of the following system of equations obtained from (3.2.2.8), (3.2.2.9), (2.1.6):

$$(3.3.23)\qquad -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2(\varrho u) + F_1 = 0,$$
$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla^2(\varrho v) + F_2 = 0,$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla^2(\varrho w) + F_3 = 0,$$
$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0,$$
$$(3.3.24)\qquad \nabla^2(kT) = E,$$
$$\bar{p} = \varrho RT,$$

where in the n-th approximation

$$(3.3.25)\qquad F_1^n = B_{n-1},\ F_2^n = C_{n-1},\ F_3^n = D_{n-1},$$

$$(3.3.26)\qquad E^n = c_v\,[L+\cdots]_{n-1} + \bar{p}_{n-1}\theta_{n-1} + T_{n-1}\nabla^2 k_{n-1} + \left[\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \cdots\right]_{n-1}$$
$$-\bar{\mu}_{n-1}\Phi_{n-1},$$

and in the $(n+1)$st approximation

$$(3.3.27)\qquad F_1^{n+1} = B_n,\ F_2^{n+1} = C_n,\ F_3^{n+1} = D_n,$$

$$(3.3.28)\qquad E^{n+1} = c_v[L+\cdots]_n + \bar{p}_n\theta_n + T_n\nabla^2 k_n + \left[\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \cdots\right]_n - \bar{\mu}_n\Phi_n.$$

Let the velocity components and their derivatives of the first five orders satisfy in the $(n-1)$st and n-th approximations the following inequalities:

$$
\begin{aligned}
&|u_{n-1}|,\ |v_{n-1}|,\ |w_{n-1}|;\ |u_n|,\ |v_n|,\ |w_n| \leqq \Omega,\\
(3.3.29)\qquad &\left|\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^4 w_{n-1}}{\partial z^4}\right|;\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^4 w_n}{\partial z^4}\right| \leqq \Omega,\\
&\left|\frac{\partial^4 u_{n-1}}{\partial x^4}\right|_1^2,\ldots,\left|\frac{\partial^4 w_{n-1}}{\partial z^4}\right|_1^2;\left|\frac{\partial^4 u_n}{\partial x^4}\right|_1^2,\ldots,\left|\frac{\partial^4 w_n}{\partial z^4}\right|_1^2 \leqq \Omega r_{12}^{\lambda},
\end{aligned}
$$

up to 5th order derivatives, where Ω const.,

$$0<\lambda<1,\ r_{12}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

Also let

$$
\begin{aligned}
&|u_n-u_{n-1}|,\ |v_n-v_{n-1}|,\ |w_n-w_{n-1}| \leqq h,\\
(3.3.30)\qquad &\left|\frac{\partial}{\partial x}(u_n-u_{n-1})\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4}(w_n-w_{n-1})\right| \leqq h,\\
&\left|\frac{\partial^4}{\partial x^4}(u_n-u_{n-1})\right|_1^2,\ldots,\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4}(w_n-w_{n-1})\right|_1^2 \leqq h r_{12}^{\lambda},
\end{aligned}
$$

up to 5th order derivatives, where $0<\lambda<1$, $r_{12}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$, h const.

Let e denote any one variable of ϱ, $\bar{\mu}$, k, T and let e satisfy the following relationships

$$
(3.3.31)\quad \left\{
\begin{aligned}
&|e_{n-1}|,\ |e_n|,\ |e_{n+1}| \leqq \Omega,\\
&\left|\frac{1}{e_{n-1}}\right|,\left|\frac{1}{e_n}\right|,\left|\frac{1}{e_{n+1}}\right| \leqq \Omega_1,\\
&\left|\frac{\partial e_{n-1}}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial e_n}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial e_{n+1}}{\partial x}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^4 e_{n-1}}{\partial z^4}\right|,\left|\frac{\partial^4 e_n}{\partial z^4}\right|,\left|\frac{\partial^4 e_{n+1}}{\partial z^4}\right| \leqq \Omega,\\
&\left|\frac{\partial^4 e_{n-1}}{\partial x^4}\right|_1^2,\left|\frac{\partial^4 e_n}{\partial x^4}\right|_1^2,\left|\frac{\partial^4 e_{n+1}}{\partial x^4}\right|_1^2,\ldots \leqq \Omega r_{12}^{\lambda},\\
&|e_n-e_{n-1}|,\ |e_{n+1}-e_n|,\ldots,\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4}(e_n-e_{n-1})\right|,\left|\frac{\partial^4}{\partial z^4}(e_{n+1}-e_n)\right| \leqq h,\\
&\left|\frac{\partial^4}{\partial x^4}(e_n-e_{n-1})\right|_1^2,\left|\frac{\partial^4}{\partial x^4}(e_{n+1}-e_n)\right|_1^2,\ldots \leqq h r_{12}^{\lambda}.
\end{aligned}
\right.
$$

Furthermore, let

$$
(3.3.32)\quad \left\{
\begin{aligned}
&|(\varrho u)_{n-1}|,\ |(\varrho u)_n|,\ldots,\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varrho u)_{n-1}\right|,\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varrho u)_n\right| \leqq \Omega,\\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varrho u)_{n-1}\right|_1^2,\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varrho u)_n\right|_1^2,\ldots, \leqq \Omega r_{12}^{\lambda},\\
&|(\varrho u)_n-(\varrho u)_{n-1}|,\ldots,\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(\varrho u)_n-(\varrho u)_{n-1}]\right| \leqq h,\\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(\varrho u)_n-(\varrho u)_{n-1}]\right|_1^2,\ldots \leqq h r_{12}^{\lambda},\\
&|(kT)_{n-1}|,\ |(kT)_n|,\ldots,\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(kT)_{n-1}\right|,\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(kT)_n\right| \leqq \Omega,\\
&\text{and also}\\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(kT)_{n-1}\right|_1^2,\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(kT)_n\right|_1^2,\ldots \leqq \Omega r_{12}^{\lambda},\\
&|(kT)_n-(kT)_{n-1}|,\ldots,\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(kT)_n-(kT)_{n-1}]\right| \leqq h,\\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(kT)_n-(kT)_{n-1}]\right|_1^2,\ldots \leqq h r_{12}^{\lambda},
\end{aligned}
\right.
$$

and

$$(3.3.33)\begin{cases} |\alpha X|,\ |\alpha Y|,\ |\alpha Z|,\ldots,\left|\dfrac{\partial^3(\alpha Z)}{\partial z^3}\right| \leqq \delta, \\ \left|\dfrac{\partial^3(\alpha X)}{\partial x^3}\right|_1^2,\ldots \leqq \delta r_{12}^{\lambda}, \\ |\varphi|,\ |\psi|,\ |\chi|;\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}\right|,\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial m}\right|,\ldots,\left|\dfrac{\partial^2\pi}{\partial m^2}\right| \leqq \delta, \\ \left|\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial l^2}\right|_1^2,\ldots \leqq \delta r_{12}^{\lambda}, \end{cases}$$

where $\delta =$ const., and l, m denote Gaussian parameters on S, i. e., if S can be represented as $z = z(x, y)$, then $l \equiv x$, $m \equiv y$ (see section 1. 2).

Let f and g denote any two variables of T, ϱ, μ, k, and let subscripts 1 and 2 denote any two successive approximations. Then from equations (3. 3. 31) and from the following fundamental rules:

$$|a+b| \leqq |a| + |b|,\ |ab| = |a||b|,$$

one obtains the following relationships:

$$\left|\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}\right| = \left|\frac{1}{f_1 f_2}\right|\left|f_2-f_1\right| = \left|\frac{1}{f_1}\right|\left|\frac{1}{f_2}\right|\left|f_2-f_1\right| \leqq \Omega_1^2 h,$$

$$\left|\frac{g_1}{f_1}-\frac{g_2}{f_2}\right| \leqq \left|\frac{g_1-g_2}{f_1}\right| + \left|g_2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1 f_2}\right| \leqq \Omega_1 h + \Omega\Omega_1^2 h,$$

$$\left|\frac{g_1^2}{f_1}-\frac{g_2^2}{f_2}\right| \leqq \left|g_1\right|\left|\frac{g_1-g_2}{f_1}\right| + \left|g_2\right|\left|\frac{g_1-g_2}{f_1}\right| + \left|g_2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1 f_2}\right| \leqq 2\Omega\Omega_1 h + \Omega\Omega_1^2 h,$$

$$\left|\frac{g_1^2}{f_1^2}-\frac{g_2^2}{f_2^2}\right| \leqq \left|g_1\right|\left|\frac{g_1-g_2}{f_1^2}\right| + \left|g_2\right|\left|\frac{g_1-g_2}{f_1^2}\right| + \left|g_2^2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_2 f_1^2}\right| + \left|g_2^2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1 f_2^2}\right|$$
$$\leqq 2\Omega\Omega_1^2 h + 2\Omega^2\Omega_1^3 h,$$

$$\left|\frac{g_1}{f_1^2}-\frac{g_2}{f_2^2}\right| \leqq \left|\frac{g_1-g_2}{f_1^2}\right| + \left|g_2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1^2 f_2}\right| + \left|g_2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1 f_2^2}\right| \leqq \Omega_1^2 h + 2\Omega\Omega_1^3 h,$$

$$\left|\frac{g_1^2}{f_1^3}-\frac{g_2^2}{f_2^3}\right| \leqq \left|g_1\right|\left|\frac{g_1-g_2}{f_1^3}\right| + \left|g_2\right|\left|\frac{g_1-g_2}{f_1^3}\right| + \left|g_2^2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1^3 f_2}\right| + \left|g_2^2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1^2 f_2^2}\right| + \left|g_2^2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1 f_2^3}\right|$$
$$\leqq 2\Omega\Omega_1^3 h + 3\Omega^2\Omega_1^4 h,$$

$$\left|\frac{1}{f_1^2}-\frac{1}{f_2^2}\right| \leqq \left|\frac{f_2-f_1}{f_1^2 f_2}\right| + \left|\frac{f_2-f_1}{f_1 f_2^2}\right| \leqq 2\Omega_1^3 h,$$

$$\left|\frac{g_1}{f_1^3}-\frac{g_2}{f_2^3}\right| \leqq \left|g_2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1^3 f_2}\right| + \left|g_2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1^2 f_2^2}\right| + \left|g_2\right|\left|\frac{f_2-f_1}{f_1 f_2^3}\right| \leqq \Omega_1^3 h + 3\Omega\Omega_1^4 h.$$

And between any two points 1 and 2 in $T + S$ from (3. 3. 31)

$$\left|\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}\right|_1^2 \leqq \Omega_1^2 h r_{12}^{\lambda}, \text{ etc.}$$

Using (3. 3. 29) to (3. 3. 33) and the above relationships one can easily calculate

$$\left|A_n - A_{n-1}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(A_n - A_{n-1})\right|.$$

From (3. 2. 1. 6)

$$
\begin{aligned}
\left|A_n - A_{n-1}\right| \leqq & \left|\frac{\partial(\alpha_n X)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha_{n-1} X)}{\partial x}\right| + \cdots + \frac{4}{3}\left|\varrho_n \nabla^2 \theta_n - \varrho_{n-1}\nabla^2\theta_{n-1}\right| + \cdots \\
& + \left|\left(\frac{2}{\nu_n}\frac{\partial \varrho_n}{\partial z} - \frac{1}{\nu_n^2}\frac{\partial \mu_n}{\partial z}\right) w_n \frac{\partial w_n}{\partial z} - \left(\frac{2}{\nu_{n-1}}\frac{\partial \varrho_{n-1}}{\partial z} - \frac{1}{\nu_{n-1}^2}\frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial z}\right) w_{n-1}\frac{\partial w_{n-1}}{\partial z}\right| \\
\leqq & \left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|\left|\frac{\varrho_n^2}{\mu_n} - \frac{\varrho_{n-1}^2}{\mu_{n-1}}\right| \\
& + 2\left\{\left|X\right|\left|\frac{\varrho_n}{\mu_n}\right|\left|\frac{\partial}{\partial x}(\varrho_n - \varrho_{n-1})\right| + \left|X\right|\left|\frac{\partial \varrho_{n-1}}{\partial x}\right|\left|\frac{\varrho_n}{\mu_n} - \frac{\varrho_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right|\right\} \\
& + \left|X\right|\left|\frac{\varrho_n^2}{\mu_n^2}\right|\left|\frac{\partial}{\partial x}(\mu_n - \mu_{n-1})\right| + \left|X\right|\left|\frac{\partial \mu_{n-1}}{\partial x}\right|\left|\frac{\varrho_n^2}{\mu_n^2} - \frac{\varrho_{n-1}^2}{\mu_{n-1}^2}\right| + \cdots \\
& + \frac{4}{3}\cdot 9\left\{\left|\varrho_n\right|\left|\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u_n - u_{n-1})\right| + \left|\frac{\partial^3 u_{n-1}}{\partial x^3}\right|\left|\varrho_n - \varrho_{n-1}\right|\right\} + \cdots \\
& + 2\left\{\left|\frac{\varrho_n}{\mu_n}\right|\left|w_n\right|\left|\frac{\partial \varrho_n}{\partial z}\right|\left|\frac{\partial}{\partial z}(w_n - w_{n-1})\right|\right. \\
& \quad + \left|\frac{\partial w_{n-1}}{\partial z}\right|\left|\frac{\varrho_n}{\mu_n}\right|\left|w_n\right|\left|\frac{\partial}{\partial z}(\varrho_n - \varrho_{n-1})\right| \\
& \quad + \left|\frac{\partial w_{n-1}}{\partial z}\right|\left|\frac{\partial \varrho_{n-1}}{\partial z}\right|\left|\frac{\varrho_n}{\mu_n}\right|\left|w_n - w_{n-1}\right| \\
& \quad \left. + \left|\frac{\partial w_{n-1}}{\partial z}\right|\left|\frac{\partial \varrho_{n-1}}{\partial z}\right|\left|w_{n-1}\right|\left|\frac{\varrho_n}{\mu_n} - \frac{\varrho_{n-1}}{\mu_{n-1}}\right|\right\} \\
& + \left|\frac{\varrho_n^2}{\mu_n^2}\right|\left|\frac{\partial \varrho_n}{\partial z}\right|\left|w_n\right|\left|\frac{\partial}{\partial z}(w_n - w_{n-1})\right| \\
& + \left|\frac{\partial w_{n-1}}{\partial z}\right|\left|\frac{\varrho_n^2}{\mu_n^2}\right|\left|\frac{\partial \varrho_n}{\partial z}\right|\left|w_n - w_{n-1}\right| \\
& + \left|\frac{\partial w_{n-1}}{\partial z}\right|\left|w_{n-1}\right|\left|\frac{\varrho_n^2}{\mu_n^2}\right|\left|\frac{\partial}{\partial z}(\varrho_n - \varrho_{n-1})\right| \\
& + \left|\frac{\partial w_{n-1}}{\partial z}\right|\left|w_{n-1}\right|\left|\frac{\partial \varrho_{n-1}}{\partial z}\right|\left|\frac{\mu_n^2}{\varrho_n^2} - \frac{\varrho_{n-1}^2}{\mu_{n-1}^2}\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3.3.34) \quad & \leqq 3\Omega h[16 + 6\Omega_1\delta + 3\Omega_1^2\delta + \Omega(60\Omega_1 + 3\Omega_1^2\delta) + \Omega^2(42\Omega_1 + 58\Omega_1^2 + 2\Omega_1^3\delta) \\
& \quad + \Omega^3(21\Omega^2 + 16\Omega_1^3) + 3\Omega^4\Omega_1^3] \\
& = \bar{\alpha}_0\,\Omega h, \quad \bar{\alpha}_0 \text{ const.}
\end{aligned}
$$

Similarly, one calculates

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{\partial}{\partial x}(A_n - A_{n-1})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial y}(A_n - A_{n-1})\right|, \left|\frac{\partial}{\partial z}(A_n - A_{n-1})\right| \leqq \bar{\alpha}_1 \Omega h, \\
(3.3.35) \quad & \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A_n - A_{n-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(A_n - A_{n-1})\right| \leqq \bar{\alpha}_2 \Omega h, \\
& \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(A_n - A_{n-1})\right|_1^2, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(A_n - A_{n-1})\right|_1^2 \leqq \bar{\alpha}_3 \Omega h r_{12}^{\lambda}, \\
& \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3 \text{ const.}^{9)}.
\end{aligned}
$$

---

[9]) The existence of (3. 3. 35) in T requires the existence of fifth order derivatives of u, v, w, third order derivatives of X, Y, Z, fourth order derivatives of ϱ and μ, in T, all satisfying H-condition.

Furthermore, from (3. 2. 1. 11)

$$(3.3.36)\quad |B_n - B_{n-1}|,\ |C_n - C_{n-1}|,\ |D_n - D_{n-1}| \leqq \bar{\alpha}_4\, \Omega h,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(B_n - B_{n-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(D_n - D_{n-1})\right| \leqq \bar{\alpha}_5\, \Omega h,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_n - B_{n-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(D_n - D_{n-1})\right| \leqq \bar{\alpha}_6\, \Omega h,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_n - B_{n-1})\right|_1^2, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(D_n - D_{n-1})\right|_1^2 \leqq \bar{\alpha}_7\, \Omega h r_{12}^{\lambda},$$

$$\bar{\alpha}_4, \ldots, \bar{\alpha}_7 \text{ const.}$$

In an analogous way one obtains from (3. 2. 2. 6)

$$(3.3.37)\quad |E_n - E_{n-1}| \leqq \bar{\alpha}_8\, \Omega h,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(E_n - E_{n-1})\right|, \ldots \leqq \bar{\alpha}_9\, \Omega h,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(E_n - E_{n-1})\right|, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{10}\, \Omega h,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(E_n - E_{n-1})\right|_1^2, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{11}\, \Omega h r_{12}^{\lambda},\ \bar{\alpha}_8, \ldots, \bar{\alpha}_{11} \text{ const.}^{10)}.$$

From (3. 3. 15), (3. 3. 19) one can write

$$(3.3.38)\quad \Phi_{n+1}(\sigma) + \Phi_n(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_T \left\{\frac{\partial G(\sigma,\tau')}{\partial x}[B'_n - B'_{n-1}] + \cdots\right\} d\tau'$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_T \left\{(x' - x)\frac{\partial G(\sigma,\tau')}{\partial x} + \cdots\right\}[A'_{n-1} - A'_n]\, d\tau'.$$

From the definition of Green's function (section 1. 3), equations (3. 3. 34), (3. 3. 36), and theorem 1. 6. 1. 1, it follows that

$$(3.3.39)\quad |\Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma)| \leqq \left|\frac{1}{2\pi}\int_T [B'_n - B'_{n-1}]\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau'\right|$$
$$+ \left|\frac{1}{2\pi}\int_T [B'_n - B'_{n-1}]\frac{\partial g(\sigma,\tau')}{\partial x}\, d\tau'\right| + \cdots$$
$$+ \left|\frac{1}{4\pi}\int_T (x' - x)[A'_{n-1} - A'_n]\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau'\right|$$
$$+ \left|\frac{1}{4\pi}\int_T (x' - x)\,[A'_{n-1} - A'_n]\frac{\partial g(\sigma,\tau')}{\partial x}\, d\tau'\right| + \cdots$$
$$\leqq \tau_1\bar{\alpha}_4\Omega h + \tau_1\bar{\alpha}_4\Omega h \max\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| + \cdots$$
$$+ \tau_2\bar{\alpha}_0\Omega h + \tau_2\bar{\alpha}_0\Omega h \max\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| + \cdots$$
$$\leqq \bar{\alpha}_{12}\Omega h,$$

where τ_1, τ_2 are constants depending on T (proportional to integrals of the form $\int_T d\tau'$, $\int_T (x' - x)\, d\tau'$). Similarly, one obtains, by use of (3. 3. 35), (3. 3. 36) and theorems

[10]) The existence of the second order derivatives requires the existence of fourth order derivatives of k in T, satisfying H-condition. Moreover, through Equation (3. 3. 24) this requires fourth order derivatives of T satisfying H-condition in T. Equation of state does the same for $\bar{p}$ and p and this closes the cycle.

1. 6. 1. 1, 1. 6. 1. 2, that $\Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma)$ possesses continuous first and second partial derivatives that satisfy an H-condition, (the question of derivatives is solved by remarks below (3. 3. 15))

$$(3.\,3.\,40)\qquad \begin{aligned} &|\Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma)|_1^2 \leqq \bar{\alpha}_{13}\Omega h r_{12}^{\lambda},\\ &\left|\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma))\right|, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{14}\Omega h,\\ &\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma))\right|, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{15}\Omega h,\\ &\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma))\right|_1^2, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{16}\Omega h r_{12}^{\lambda}, \end{aligned}$$

where $\bar{\alpha}_{13}, \ldots, \bar{\alpha}_{16}$ const. (3. 3. 16) and (3. 3. 20) furnish with $\bar{K}$ denoting a mean value

$$(3.\,3.\,41)\qquad p_{n+1}(\sigma) - p_n(\sigma) = \int_S \bar{K}(\sigma, \sigma')\,[\Phi_{n+1}(\sigma') - \Phi_n(\sigma')]\,d\sigma' + \Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma),$$

whence by (3. 3. 39) and by the fact that K is bounded

$$(3.\,3.\,42)\qquad |p_{n+1}(\sigma) - p_n(\sigma)| \leqq \max|K|\,\bar{\alpha}_{12}\Omega h\sigma_1 + \bar{\alpha}_{12}\Omega h \leqq \bar{\alpha}_{17}\Omega h,$$

where $\sigma_1, \bar{\alpha}_{17}$ const. Furthermore, by use of (3. 2. 1. 30), one has also

$$(3.\,3.\,43)\qquad p_{n+1}(\sigma) - p_n(\sigma) = \frac{1}{4\pi}\int_S r\,\frac{\partial^2 G(\sigma, \sigma')}{\partial r\,\partial n'}\,[p_{n+1}(\sigma') - p_n(\sigma')]\,d\sigma' + \Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma),$$

which, by (3. 2. 1. 26), can be written

$$(3.\,3.\,44)\qquad \begin{aligned} p_{n+1}(\sigma) - p_n(\sigma) = {}& \frac{1}{\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)[p_{n+1}(\sigma') - p_n(\sigma')]\,d\sigma'\\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_S \Phi_1(\sigma, \sigma')\,[p_{n+1}(\sigma') - p_n(\sigma')]\,d\sigma'\\ &+ \Phi_{n+1}(\sigma) - \Phi_n(\sigma). \end{aligned}$$

According to theorem 1. 6. 3. 1 and equation (3. 3. 42), the first integral on the right hand side of (3. 3. 44) satisfies an H-condition

$$(3.\,3.\,45)\qquad \left|\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r}\right)[p_{n+1} - p_n]\,d\sigma'\right|_1^2 \leqq \bar{\alpha}_{17}\Omega h\sigma_2 r_{12}^{\lambda} = \bar{\alpha}_{18}\Omega h r_{12}^{\lambda},$$

where $\sigma_2, \bar{\alpha}_{18}$ const. The second integral in (3. 3. 44), since Φ_1 is of the form $\Phi_1 \sim \frac{1}{r}\Phi^{(1)}$ (see equation (3. 2. 1. 26)), behaves like a potential single layer, and, according to theorem 1. 6. 2. 1, satisfies an H-condition

$$(3.\,3.\,46)\qquad \left|\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r}\Phi^{(1)}[p_{n+1} - p_n]\,d\sigma'\right|_1^2 \leqq \max|\Phi^{(1)}|\,\bar{\alpha}_{17}\Omega h\sigma_2 r_{12}^{\lambda} = \bar{\alpha}_{19}\Omega h r_{12}^{\lambda},$$

where $\bar{\alpha}_{19}$ const. Thus, it follows from (3. 3. 44) with the use of equations (3. 3. 40), (3. 3. 45), (3. 3. 46), that $p_{n+1}(\sigma) - p_n(\sigma)$ satisfies an H-condition

$$(3.\,3.\,47)\qquad |p_{n+1}(\sigma) - p_n(\sigma)| \leqq \bar{\alpha}_{20}\Omega h r_{12}^{\lambda}, \quad \bar{\alpha}_{20} \text{ const.}$$

Applying (3. 3. 47) to both integrands on the right hand side of (3. 3. 44) and using theorems 1. 6. 2. 2 and 1. 6. 3. 4 one arrives at the conclusion that both integrals in (3. 3. 44) have continuous first partial derivatives in tangential direction and satisfy an H-condition. Then, by applying (3. 3. 40), it follows that the last two terms in (3. 3. 44) possess continuous first partial derivatives which implies that $p_{n+1} - p_n$ on the left hand side of (3. 3. 44) has continuous first partial derivatives in tangential direction l on surface S. These derivatives satisfy an H-condition

$$\left|\frac{\partial}{\partial l}(p_{n+1}-p_n)\right| \leqq \bar{\alpha}_{21}\Omega h, \tag{3. 3. 48}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial l}(p_{n+1}-p_n)\right|_1^2 \leqq \bar{\alpha}_{22}\Omega h r_{12}^{\lambda}, \tag{3. 3. 49}$$

where $\bar{\alpha}_{21}, \bar{\alpha}_{22}$ const. From (3. 3. 23) and (3. 3. 24) one can write now

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial p_n}{\partial x}+B_{n-1}+\nabla^2(\varrho u)_n=0, && -\frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}+B_n+\nabla^2(\varrho u)_{n+1}=0,\\ &-\frac{\partial p_n}{\partial y}+C_{n-1}+\nabla^2(\varrho v)_n=0, && -\frac{\partial p_{n+1}}{\partial y}+C_n+\nabla^2(\varrho v)_{n+1}=0,\\ &-\frac{\partial p_n}{\partial z}+D_{n-1}+\nabla^2(\varrho w)_n=0, && -\frac{\partial p_{n+1}}{\partial z}+D_n+\nabla^2(\varrho w)_{n+1}=0, \end{aligned} \tag{3. 3. 50}$$

$$\nabla^2(kT)_n=E_n, \quad \nabla^2(kT)_{n+1}=E_{n+1}, \tag{3. 3. 51}$$

$$\frac{\partial(\varrho u)_n}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)_n}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)_n}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial(\varrho u)_{n+1}}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v)_{n+1}}{\partial y}+\frac{\partial(\varrho w)_{n+1}}{\partial z}=0. \tag{3. 3. 52}$$

(3. 3. 50) — (3. 3. 52) can be combined to give

$$\frac{\partial}{\partial x}(p_{n+1}-p_n)+B_{n+1}-B_n=\nabla^2[(\varrho u)_{n+1}-(\varrho u)_n], \tag{3. 3. 53}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{\partial}{\partial x}[(\varrho u)_{n+1}-(\varrho u)_n]+\frac{\partial}{\partial y}[(\varrho v)_{n+1}-(\varrho v)_n]+\frac{\partial}{\partial z}[(\varrho w)_{n+1}-(\varrho w)_n]=0, \tag{3. 3. 54}$$

$$\nabla^2[(kT)_{n+1}-(kT)_n]=E_{n+1}-E_n. \tag{3. 3. 55}$$

Differentiating (3. 3. 53) with respect to x, y, z, respectively, and adding

$$\nabla^2(p_{n+1}-p_n)=\frac{\partial}{\partial x}(B_n-B_{n-1})+\frac{\partial}{\partial y}(C_n-C_{n-1})+\frac{\partial}{\partial z}(D_n-D_{n-1}), \tag{3. 3. 56}$$

with the right hand sides in (3. 3. 53) vanishing due to continuity equation. Consider again $p_{n+1}-p_n$. Since the value of the pointfunction $p_{n+1}-p_n$ satisfies, on the boundary S, the equations (3. 3. 47) — (3. 3. 49), one obtains, by use of theorem 1. 7. 2 and of equations (3. 3. 36), for all τ in $T+S$

$$\begin{aligned} &|p_{n+1}(\tau)-p_n(\tau)|, \left|\frac{\partial}{\partial x}(p_{n+1}-p_n)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(p_{n+1}-p_n)\right| \leqq \bar{\alpha}_{23}\Omega h,\\ &\left|\frac{\partial}{\partial x}(p_{n+1}-p_n)\right|_1^2, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{24}\Omega h r_{12}^{\lambda}, \qquad \bar{\alpha}_{23}, \bar{\alpha}_{24}=\text{const.} \end{aligned} \tag{3. 3. 57}$$

Considering again (3. 3. 44), theorems 1. 6. 2. 3, 1. 6. 3. 5 and, applying the reasoning above, it is seen that $p_{n+1}-p_n$ has continuous second partial derivatives in tangential direction l on surface S which satisfy an H-condition

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^2}{\partial l^2}(p_{n+1}-p_n)\right| \leqq \bar{\alpha}_{25}\Omega h,\\ &\left|\frac{\partial^2}{\partial l^2}(p_{n+1}-p_n)\right|_1^2 \leqq \bar{\alpha}_{26}\Omega h r_{12}^{\lambda}, \qquad \bar{\alpha}_{25}, \bar{\alpha}_{26}=\text{const.} \end{aligned} \tag{3. 3. 58}$$

By use of theorem 1. 7. 3 it follows immediately that for all τ in $T+S$

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(p_{n+1}(\tau)-p_n(\tau))\right|, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{27}\Omega h,\\ &\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(p_{n+1}-p_n)\right|_1^2, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{28}\Omega h r_{12}^{\lambda}, \quad \bar{\alpha}_{27}, \bar{\alpha}_{28} \text{ const.} \end{aligned} \tag{3. 3. 59}$$

Considering $(kT)_{n+1} - (kT)_n$, one obtains from the boundary conditions that $(kT)_{n+1} - (kT)_n = 0$ on S. From (3. 3. 37), (3. 3. 55) one sees clearly that for all τ in $T + S$

$$(3.\,3.\,60)\qquad \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(kT)_{n+1} - (kT)_n]\right|, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{29}\Omega h,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(kT)_{n+1} - (kT)_n]\right|_1^2, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{30}\Omega h r_{12}^{\lambda}, \quad \bar{\alpha}_{29}, \bar{\alpha}_{30} \text{ const.},$$

and by integration, obviously,

$$|(kT)_{n+1} - (kT)_n|, \left|\frac{\partial}{\partial x}[(kT)_{n+1} - (kT)_n]\right|, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{29}\Omega h.$$

Considering $(\varrho u)_{n+1} - (\varrho u)_n$, one has, from the boundary conditions that $(\varrho u)_{n+1} - (\varrho u)_n = 0$ on S. From (3. 3. 36), (3. 3. 53), (3. 3. 57) it is seen that for all $\tau \in T + S$

$$(3.\,3.\,61)\qquad \begin{cases} |(\varrho u)_{n+1}(\tau) - (\varrho u)_n(\tau)|, \left|\dfrac{\partial}{\partial x}[(\varrho u)_{n+1} - (\varrho u)_n]\right|, \ldots \\ \left|\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}[(\varrho u)_{n+1} - (\varrho u)_n]\right|, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{31}\Omega h, \\ \left|\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}[(\varrho u)_{n+1} - (\varrho u)_n]\right|_1^2, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{32}\Omega h r_{12}^{\lambda}, \quad \bar{\alpha}_{31}, \bar{\alpha}_{32} \text{ const.} \end{cases}$$

Similar conditions are valid for ϱv and ϱw.

Assuming now that

$$(3.\,3.\,62)\qquad \Omega \leqq \Omega_0 = \min\left[\frac{1}{2\bar{\alpha}_{32}}, \frac{1}{2\bar{\alpha}_{31}}, \frac{1}{2\bar{\alpha}_{30}}, \frac{1}{2\bar{\alpha}_{29}}, \frac{1}{\bar{\alpha}_{28}}, \frac{1}{\bar{\alpha}_{27}}, \frac{1}{\bar{\alpha}_{24}}, \frac{1}{\bar{\alpha}_{23}}\right],$$

then from (3. 3. 61),

$$(3.\,3.\,63)\qquad |(\varrho u)_{n+1} - (\varrho u)_n|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(\varrho u)_{n+1} - (\varrho u)_n]\right| \leqq \bar{\alpha}_{31}\frac{1}{2\bar{\alpha}_{31}}h = \tfrac{1}{2}h,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(\varrho u)_{n+1} - (\varrho u)_n]\right|_1^2, \ldots \leqq \tfrac{1}{2}h r_{12}^{\lambda}.$$

Similar conditions hold for ϱv and ϱw. For simplicity, the following details are shown for ϱu only.

From (3. 3. 3) assume T and S sufficiently small, so that the following is true:

$$(3.\,3.\,64)\qquad |(\varrho u)_1|, |(\varrho u)_2|, \ldots, \left|\frac{\partial^2(\varrho u)_1}{\partial z^2}\right|, \left|\frac{\partial^2(\varrho u)_2}{\partial z^2}\right| \leqq \frac{1}{4}\Omega_0,$$

$$\left|\frac{\partial^2(\varrho u)_1}{\partial x^2}\right|_1^2, \left|\frac{\partial^2(\varrho u)_2}{\partial x^2}\right|_1^2, \ldots \leqq \frac{1}{4}\Omega_0 r_{12}^{\lambda}.$$

It may be easily shown that the above assumption is justified.

By use of the first approximative equations (3. 3. 1) — (3. 3. 3) where $|\alpha_0 X|$ etc. have been assumed sufficiently small that (3. 3. 64) is true, one concludes that $(\varrho u)_1$ must also be small. Since the single functions $u, \ldots, k_1$ as calculated from the first approximation, are used in the second approximative equations, (3. 3. 64) implies that also all the single functions $u, \ldots, k$ must be small. Notice that the integral $\int_S p_0\, d\sigma'$ is zero.

From (3. 3. 64) it follows immediately that

$$(3.\,3.\,65)\qquad |(\varrho u)_2 - (\varrho u)_1|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(\varrho u)_2 - (\varrho u)_1]\right| \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(\varrho u)_2 - (\varrho u)_1]\right|_1^2, \ldots \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0 r_{12}^{\lambda}.$$

From (3. 3. 32) one has:

$$|(\varrho u)_n - (\varrho u)_{n-1}| \leqq h,$$

which, for $n = 2$, gives from above

$$h = \tfrac{1}{2}\,\Omega_0. \tag{3.3.65a}$$

From (3.3.63) $|(\varrho u)_{n+1} - (\varrho u)_n| \leqq \frac{h}{2}$, for $n = 2$, with $h = \frac{1}{2}\,\Omega_0$, gives

$$|(\varrho u)_3 - (\varrho u)_2| \leqq \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\Omega_0 = \tfrac{1}{4}\,\Omega_0.$$

Similarly, for $n = 3$:

$$|(\varrho u)_n - (\varrho u)_{n-1}| \leqq h,\ h = \tfrac{1}{4}\,\Omega_0.$$

Again

$$|(\varrho u)_{n+1} - (\varrho u)_n| \leqq \frac{h}{2} \leqq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\Omega_0, \text{ etc.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$|(\varrho u)_m - (\varrho u)_{m-1}|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(\varrho u)_m - (\varrho u)_{m-1}]\right| \leqq \frac{1}{2^{m-1}}\,\Omega_0, \tag{3.3.66}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(\varrho u)_m - (\varrho u)_{m-1}]\right|_1^2, \ldots \leqq \frac{1}{2^{m-1}}\,\Omega_0 r_{12}^{\lambda},\ m \geqq 3.$$

Furthermore with (3.3.64)

$$|(\varrho u)_3| = |(\varrho u)_2 + [(\varrho u)_3 - (\varrho u)_2]| \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0, \ldots, \left|\frac{\partial^2(\varrho u)_3}{\partial z^2}\right| \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0, \tag{3.3.67}$$

$$\left|\frac{\partial^2(\varrho u)_3}{\partial x^2}\right|_1^2, \ldots \leqq \frac{1}{2}\,\Omega_0 r_{12}^{\lambda},$$

$$|(\varrho u)_4| = |(\varrho u)_2 + [(\varrho u)_3 - (\varrho u)_2] + [(\varrho u)_4 - (\varrho u)_3]| \leqq \frac{5}{8}\,\Omega_0, \ldots$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\varrho u)_4\right| \leqq \frac{5}{8}\,\Omega_0,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varrho u)_4\right|_1^2, \ldots \leqq \frac{5}{8}\,\Omega_0 r_{12}^{\lambda},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$|(\varrho u)_m| \leqq \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^{m-1}}\right)\Omega_0 < \Omega_0, \ldots, \left|\frac{\partial^2(\varrho u)_m}{\partial z^2}\right| < \Omega_0,$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varrho u)_m\right|_1^2, \ldots \leqq \Omega_0 r_{12}^{\lambda}.$$

From (3.3.66) it follows now that the following infinite series converge absolutely and uniformly:

$$(\varrho u)_1 + \sum_{k=2}^{\infty}[(\varrho u)_k - (\varrho u)_{k-1}], \ldots, \frac{\partial^2(\varrho u)}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(\varrho u)_k - (\varrho u)_{k-1}],$$

also

$$(\varrho v)_1 + \sum_{k=2}^{\infty}[(\varrho v)_k - (\varrho v)_{k-1}], \ldots, \frac{\partial^2(\varrho v)_1}{\partial z^2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(\varrho v)_k - (\varrho v)_{k-1}], \tag{3.3.68}$$

$$(\varrho w)_1 + \sum_{k=2}^{\infty}[(\varrho w)_k - (\varrho w)_{k-1}], \ldots, \frac{\partial^2(\varrho w)_1}{\partial z^2} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[(\varrho w)_k - (\varrho w)_{k-1}].$$

Let then

$$\varrho u = (\varrho u)_1 + \sum_{k=2}^{\infty}[(\varrho u)_k - (\varrho u)_{k-1}], \ldots, \tag{3.3.69}$$

where $\varrho u, \varrho v, \varrho w$ are continuous functions in $T + S$ and possess continuous partial derivatives of the first two orders. The partial derivatives of second order also satisfy an H-condition due to (3.3.66):

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varrho u)\right|_1^2, \ldots \leqq \Omega_0 r_{12}^{\lambda}.$$

From (3. 3. 57) and (3. 3. 62) it follows that

$$| p_{n+1}(\tau) - p_n(\tau) | \leqq h.$$

Reconsidering now (3. 3. 59), (3. 3. 62), (3. 3. 66) for p, (take $h = \frac{\Omega_0}{2^{m-1}}$, $m = n$), one arrives at

$$(3.\,3.\,70) \qquad | p_{m+1} - p_m |, \ldots, \left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} (p_{m+1} - p_m) \right| \leqq \frac{1}{2^{m-1}} \Omega_0,$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p_{m+1} - p_m) \right|_1^2, \ldots \leqq \frac{\Omega_0}{2^{m-1}} r_{12}^{\lambda}, \qquad m \geqq 2.$$

As in (3. 3. 68) the infinite series

$$(3.\,3.\,71) \qquad p_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (p_k - p_{k-1}), \ldots, \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (p_k - p_{k-1})$$

converge absolutely and uniformly. The function

$$(3.\,3.\,72) \qquad p(\tau) = p_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (p_k - p_{k-1})$$

is continuous in $T + S$ with continuous first and second partial derivatives which satisfy an H-condition due to (3. 3. 70):

$$(3.\,3.\,73) \qquad \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|_1^2, \ldots \leqq \Omega_0^* r_{12}^{\lambda}.$$

This justifies the assumption used in (3. 3. 7).

In similar fashion as for (ϱu), one can construct from (3. 3. 60), (3. 3. 62) an absolutely and uniformly convergent series for kT. Analogously to (3. 3. 64) — (3. 3. 67):

$$(3.\,3.\,74) \qquad | (kT)_{m+1} - (kT)_m |, \ldots, \left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} [(kT)_{m+1} - (kT)_m] \right| \leqq \frac{\Omega}{2^{m-1}},$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(kT)_{m+1} - (kT)_m] \right|_1^2, \ldots \leqq \frac{\Omega_0}{2^{m-1}} r_{12}^{\lambda}, \qquad m \geqq 3.$$

Again, as in (3. 3. 68) the infinite series

$$(3.\,3.\,75) \qquad (kT)_1 + \sum_{i=2}^{\infty} [(kT)_i - (kT)_{i-1}], \ldots, \frac{\partial^2 (kT)_1}{\partial z^2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [(kT)_i - (kT)_{i-1}]$$

are absolutely and uniformly convergent. The function

$$(3.\,3.\,76) \qquad kT = (kT)_1 + \sum_{i=2}^{\infty} [(kT)_i - (kT)_{i-1}]$$

is continuous in $T + S$ with continuous first and second partial derivatives which satisfy an H-condition due to (3. 3. 74):

$$\left| \frac{\partial^2 (kT)}{\partial x^2} \right|_1^2, \ldots \leqq \bar{\Omega}_0^* r_{12}^{\lambda}.$$

Next, one will calculate single functions, but, in this procedure, one has to begin with temperature, as indicated in the first approximation. Furthermore, for all $\tau \in T + S$:

$$| T_{n+1} - T_n | = \left| \frac{(kT)_{n+1}}{k_n} - \frac{(kT)_n}{k_{n-1}} \right| \leqq \left| \frac{(kT)_{n+1} - (kT)_n}{k_n} \right| + | (kT)_n | \left| \frac{1}{k_n k_{n-1}} \right| |k_{n-1} - k_n|$$

$$\leqq \Omega_1 \bar{\alpha}_{29} \Omega h + \Omega_1^2 \Omega_0 h \leqq \bar{\alpha}_{33} \Omega h, \qquad \bar{\alpha}_{33} \text{ const.}$$

Similarly,

$$(3.\,3.\,77) \qquad \left| \frac{\partial}{\partial x} (T_{n+1} - T_n) \right|, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{34} \Omega h,$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T_{n+1} - T_n) \right|, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{35} \Omega h,$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T_{n+1} - T_n) \right|_1^2, \ldots \leqq \bar{\alpha}_{36} \Omega h r_{12}^{\lambda}, \qquad \bar{\alpha}_{34}, \ldots, \bar{\alpha}_{36} \text{ const.}$$

Also

$$
\begin{aligned}
|d(\bar{p}_{n+1}-\bar{p}_n)| &= \left|\frac{\bar{\mu}_{n+1}}{\varrho_n}\frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}-\frac{\bar{\mu}_n}{\varrho_{n-1}}\frac{\partial p_n}{\partial x}\right|\left|dx\right| + \left|\frac{\bar{\mu}_{n+1}}{\varrho_n}\frac{\partial p_{n+1}}{\partial y}-\frac{\bar{\mu}_n}{\varrho_{n-1}}\frac{\partial p_n}{\partial y}\right|\left|dy\right| + \cdots \\
&\leqq \left|\frac{\partial p_n}{\partial x}\right|\left|\bar{\mu}_n\right|\left|\frac{1}{\varrho_n\varrho_{n-1}}\right|\left|\varrho_n-\varrho_{n-1}\right|\left|dx\right| + \left|\frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}\right|\left|\frac{1}{\varrho_n}\right|\left|\bar{\mu}_{n+1}-\bar{\mu}_n\right|\left|dx\right| \\
&\quad + \left|\bar{\mu}_n\right|\left|\frac{1}{\varrho_n}\right|\left|\frac{\partial}{\partial x}(p_{n+1}-p_n)\right|\left|dx\right| + \cdots \\
&\leqq 3[\Omega_0\Omega\Omega_1^2 h\tau_3 + \Omega_0\Omega_1 h\tau_4 + \Omega\Omega_1\bar{\alpha}_{22}\Omega h\tau_5] \\
&= \bar{\alpha}_{37}\Omega h,
\end{aligned}
$$

where τ_3, τ_4, τ_5 are constants depending on T, and $\bar{\alpha}_{37}$ is constant. Since the integration is over a finite region $T+S$, the conclusion is that $p_{n+1}-p_n$ is bounded,

$$
(3.3.78) \qquad |\bar{p}_{n+1}-\bar{p}_n| \leqq \bar{\alpha}_{38}\,\Omega h, \qquad \bar{\alpha}_{38} \text{ const.}
$$

It is also easily seen that

$$
(3.3.79) \qquad
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_{n+1}-\bar{p}_n)\right|,\ldots = \left|\frac{\bar{\mu}_{n+1}}{\varrho_n}\frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}-\frac{\bar{\mu}_n}{\varrho_{n-1}}\frac{\partial p_n}{\partial x}\right|,\ldots \leqq \bar{\alpha}_{39}\Omega h, \\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bar{p}_{n+1}-\bar{p}_n)\right|,\ldots = \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{\mu}_{n+1}}{\varrho_n}\frac{\partial p_{n+1}}{\partial x}-\frac{\bar{\mu}_n}{\varrho_{n-1}}\frac{\partial p_n}{\partial x}\right)\right|,\ldots \leqq \bar{\alpha}_{40}\Omega h, \\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\bar{p}_{n+1}-\bar{p}_n)\right|_1^2,\ldots \leqq \bar{\alpha}_{40}\Omega h r_{12}^{\lambda}, \qquad \bar{\alpha}_{39}, \bar{\alpha}_{40} \text{ const.}
\end{aligned}
$$

By use of equation of state and (3.3.78), (3.3.79) one obtains

$$
\begin{aligned}
|\varrho_{n+1}-\varrho_n| &= \frac{1}{R}\left|\frac{\bar{p}_{n+1}}{T_{n+1}}-\frac{\bar{p}_n}{T_n}\right| \\
&\leqq \frac{1}{R}\left|\bar{p}_{n+1}\right|\left|\frac{1}{T_{n+1}T_n}\right|\left|T_{n+1}-T_n\right| + \frac{1}{R}\left|T_{n+1}\right|\left|\frac{1}{T_n}\right|\left|\bar{p}_{n+1}-\bar{p}_n\right| \\
&\leqq \bar{\alpha}_{41}\Omega h,
\end{aligned}
$$

and

$$
(3.3.80) \qquad
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial x}(\varrho_{n+1}-\varrho_n)\right|,\ldots = \frac{1}{R}\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{p}_{n+1}}{T_{n+1}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{p}_n}{T_n}\right)\right|,\ldots \leqq \bar{\alpha}_{42}\Omega h, \\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varrho_{n+1}-\varrho_n)\right|,\ldots = \frac{1}{R}\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\bar{p}_{n+1}}{T_{n+1}}-\frac{\bar{p}_n}{T_n}\right]\right|,\ldots \leqq \bar{\alpha}_{43}\Omega h, \\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varrho_{n+1}-\varrho_n)\right|_1^2,\ldots \leqq \bar{\alpha}_{44}\Omega h r_{12}^{\lambda}, \qquad \bar{\alpha}_{41},\ldots,\bar{\alpha}_{44} \text{ const.}
\end{aligned}
$$

Similarly

$$
\begin{aligned}
|u_{n+1}-u_n| &= \left|\frac{(\varrho u)_{n+1}}{\varrho_{n+1}}-\frac{(\varrho u)_n}{\varrho_n}\right| \leqq \left|\frac{(\varrho u)_{n+1}(\varrho_{n+1}-\varrho_n)}{\varrho_{n+1}\varrho_n}\right| + \left|\frac{(\varrho u)_{n+1}-(\varrho u)_n}{\varrho_n}\right| \\
&\leqq \Omega_0\Omega_1^2\bar{\alpha}_{41}\Omega h + \Omega_1\bar{\alpha}_{31}\Omega h \\
&\leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega h,
\end{aligned}
$$

and also

$$
(3.3.81) \qquad
\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial x}(u_{n+1}-u_n)\right|,\ldots = \left|\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(\varrho u)_{n+1}}{\varrho_{n+1}}-\frac{(\varrho u)_n}{\varrho_n}\right]\right|,\ldots \leqq \bar{\alpha}_{46}\Omega h, \\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{n+1}-u_n)\right|,\ldots = \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{(\varrho u)_{n+1}}{\varrho_{n+1}}-\frac{(\varrho u)_n}{\varrho_n}\right]\right|,\ldots \leqq \bar{\alpha}_{47}\Omega h, \\
&\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_{n+1}-u_n)\right|_1^2,\ldots \leqq \bar{\alpha}_{48}\Omega h r_{12}^{\lambda},
\end{aligned}
$$

where $\bar{\alpha}_{45},\ldots,\bar{\alpha}_{48}$ const.

Similar conditions hold for $v_{n+1}-v_n$ and $w_{n+1}-w_n$. Again, for simplicity, the following details are shown for u only. One finds, from (3.3.30), that $|u_n-u_{n-1}| \leqq h$,

and from (3. 3. 80) $|u_{n+1} - u_n| \leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega h$. But for $n = 2$, $|u_n - u_{n-1}| \leqq h$, and using h from (3. 3. 65 a) one gets:

$$|u_2 - u_1| \leqq h = \tfrac{1}{2}\Omega_0, \tag{3. 3. 81 a}$$

whence $|u_{n+1} - u_n| \leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega h$ gives

$$|u_3 - u_2| \leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega h \leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega \tfrac{1}{2}\Omega_0 \leqq \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_{45}\Omega_0^2.$$

For $n = 3$

$$|u_n - u_{n-1}| = |u_3 - u_2| \leqq h = \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_{45}\Omega_0^2,$$

whence

$$|u_{n+1} - u_n| = |u_4 - u_3| \leqq \bar{\alpha}_{45}\Omega h = \bar{\alpha}_{45}\Omega \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_{45}\Omega_0^2 \leqq \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_{45}^2\Omega_0^3,$$

. . . . . .

$$|u_m - u_{m-1}|, \ldots, \left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u_m - u_{m-1})\right| \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{m-2}, \tag{3. 3. 81 b}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_m - u_{m-1})\right|_1^2, \ldots \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{m-2} r_{12}^{\lambda},$$

where $\bar{\alpha}_{45}\Omega_0 \leqq 1$. From (3. 3. 30),

$$|u_m - u_{m-1}| \leqq h = \tfrac{1}{2}\Omega_0,$$

and from (3. 3. 81 a)

$$|u_m - u_{m-1}| \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{m-2},$$

which implies that $(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)$ must be $\leqq 1$. This superimposes restriction upon Ω_0 and Ω, (3. 3. 62), i. e., the proof is valid for small magnitudes of u, v, w, ϱ, T, $\bar{\mu}$, k (and $\bar{p}$), and for small variations of these functions including higher order derivatives, i. e., for highly rarefied gas at low temperature with small viscosity and heat conductivity. Following the procedure used in arriving at (3. 3. 69), one calculates the function u.

Following (3. 3. 64) one assumes

$$|u_1|, |u_2|, \ldots, \left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right| \leqq \tfrac{1}{4}\Omega_0,$$

and by use of (3. 3. 81 b)

$$|u_3| = |u_2 + (u_3 - u_2)| \leqq \tfrac{1}{4}\Omega_0 + \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_{45}\Omega_0^2.$$

Similarly,

$$|u_4| = |u_2 + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3)| \leqq \tfrac{1}{4}\Omega_0 + \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_{45}\Omega_0^2 + \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_{45}^2\Omega_0^3,$$

. . . . . .

$$|u_m| \leqq \Omega_0\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=3}^{m}(\bar{\alpha}_{45}\Omega_0)^{k-2}\right), \tag{3. 3. 82}$$

where $m \geqq 3$, $\bar{\alpha}_{45}\Omega_0 \leqq 1$. And, as above, one arrives at function

$$u = u_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(u_k - u_{k-1}) \tag{3. 3. 83}$$

which is a continuous function in $T + S$ and has continuous partial derivatives of the first two orders. Partial derivatives of the second order satisfy an H-condition due to (3. 3. 81 b):

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_1^2, \ldots \leqq \Omega^* r_{12}^{\lambda}.$$

Analogous equations hold for v and w. In an entirely similar method as used in (3. 3. 81) to (3. 3. 83) one can show that the functions

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(\bar{p}_k - \bar{p}_{k-1}), \tag{3. 3. 84}$$

$$T = T_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(T_k - T_{k-1}),$$

$$\varrho = \varrho_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(\varrho_k - \varrho_{k-1})$$

are continuous functions in $T + S$ having continuous partial derivatives of the first two orders. The partial derivatives of the second order satisfy an H-condition. Next, one will consider B_{n-1} in the form (3. 2. 1. 11) and substitute it into (3. 3. 50). Also p in form of (3. 3. 72), and (ϱu) in form of (3. 3. 69) will be introduced into (3. 3. 50). Applying similar procedure to the remaining equations and applying the limiting process $(n \to \infty)$, one obtains (3. 2. 1. 1) — (3. 2. 1. 3), (3. 2. 2. 1). These equations are completely equivalent to the original system of equations (2. 1. 1) — (2. 1. 6). Thus, the limiting process of the successive approximation solutions leads back to the original system.

In the approximation process for $p(\tau)$ and $\bar{p}(\tau)$ one uses equations (3. 2. 1. 15) or (3. 2. 1. 22), and (3. 3. 7) respectively, i. e. the nth approximation for $p_n(\tau)$ is expressed by means of all the remaining variables $u, v, \ldots$ with the subscripts $n - 1$, and $\bar{p}(\tau)$ is calculated from $p(\tau)$ by means of (3. 3. 7). In the limit, with n approaching infinity, one obtains the above mentioned equations (3. 2. 1. 15) or (3. 2. 1. 22). For $\bar{p}(\tau)$ one obtains the final series in form (3. 3. 84).

As it has been shown above, both $p(\tau)$ and $\bar{p}(\tau)$ are continuous in T and their partial derivatives of the first and second order satisfy an H-condition. This fact will be used in considering (2. 1. 5) which implies that the temperature T, and therefore $k(T)$ and $\bar{\mu}(T)$, are continuous functions in T possessing continuous partial derivatives of the first four orders (the highest satisfy an H-condition). This follows from differentiating (2. 1. 5) twice, provided that u, v, w are differentiable three times which is proved a posteriori, i. e., below, due to the simultaneous character of the system of equations in question.

Considering (2. 1. 1) — (2. 1. 3) and the properties of $\bar{\mu}$ from above, it is seen that u, v, w are continuous functions in T and they possess continuous partial derivatives of first five orders (the highest satisfy an H-condition), and $\bar{p}$ (and also p) possess also continuous partial derivatives of first four orders (the highest satisfy an H-condition). This follows from differentiating (2. 1. 1) — (2. 1. 3) three times. Finally, from the equation of state, it follows from the properties of T and $\bar{p}$ that ϱ is a continuous function with continuous partial derivatives of first four orders (the highest satisfy an H-condition). Similar procedure applied to equation of continuity (2. 1. 4) admits the continuity of the functions (ϱu), (ϱv), (ϱw) jointly with their derivatives up to the required order (the highest satisfy an H-condition). Using the equation of energy in a modified form (3. 2. 2. 1) one can show the same for (kT).

Thus the assumptions referring to functions $u, v, w, \bar{p}, T, \varrho, k = k(T), \bar{\mu} = \bar{\mu}(T)$ in section 3. 1 are satisfied and it is seen that the above functions form a solution to the given system of equations.

The operations of differentiation, mentioned above, can be accomplished either directly on equations (2. 1. 1) — (2. 1. 5) (due to the assumption on the existence of the derivatives) or one can refer to various forms derived in the procedure of the proof, containing the derivatives in question.

Eingegangen 7. Januar 1960.

Über die Lösungen einer partiellen elliptischen Differentialgleichung, deren Koeffizienten von einem komplexen Parameter abhängen *).

Von *Lothar Jantscher* in Braunschweig.

Einleitung.
§ 1. Bezeichnungen.
§ 2. Formulierung der Randwertaufgaben.
§ 3. Levische Funktionen, Stokessche Formel.
§ 4. Hilfssätze.
§ 5. Grundlösungen für die Gleichung $(\mathfrak{M}_{xy} - \varkappa^2 h(y))\, u = 0$.
§ 6. Grundlösungen für die Gleichung $(\mathfrak{M}_x - \varkappa^2 h(x))\, u = 0$.
§ 7. Die $\varkappa$-Abhängigkeit von $Q(x, y)$.
§ 8. Das Verhalten der Lösungen einer allgemeinen elliptischen Differentialgleichung für $|\varkappa| \to \infty$.
§ 9. Greensche Funktionen.
§ 10. Die $\varkappa$-Abhängigkeit der Greenschen Funktionen.
§ 11. Die Randwertaufgaben für die Gleichung (79).
Literatur.

Einleitung.

Untersucht wird die lineare partielle elliptische Differentialgleichung

$$\mathfrak{M}_x(u) + \sum_{p=1}^{n} B_p u_{x_p} + (A - \varkappa^2 h)\, u = D \tag{1}$$

für große Beträge des im allgemeinen komplexen Parameters $\varkappa$. Hierbei bedeutet $\mathfrak{M}_x$ den linearen elliptischen Operator

$$\mathfrak{M}_x = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_{p=1}^{n} b_p \frac{\partial}{\partial x_p} + c$$

mit $a_{pq} \in C^{(2)}$, b_p, c, $h \in C^{(1)}$ in einem beschränkten Gebiet C des reellen R_n. Die Koeffizienten A, D und B_p sind aus $C^{(0,\mu)}$ bzw. $C^{(1,\mu)}$ mit $0 < \mu < 1$ und können noch von dem Parameter $\varkappa$ abhängen. Es gelte in jedem abgeschlossenen Bereich $T \subset C$ gleichmäßig $A = O(|\varkappa|^{\alpha})$, $B_p = O(|\varkappa|^{\beta})$, $D = O(|\varkappa|^{\gamma})$, $\frac{\partial}{\partial x_p} B_q = O(|\varkappa|^{\beta'})$ mit $\alpha, \beta', \gamma < 2$, $\beta < 1$.

*) Dissertation Technische Hochschule Braunschweig 1960; Referenten: Prof. Dr. R. Iglisch, Prof. Dr. A. Dinghas.

Die Lösungen von (1) werden für große Beträge von $\varkappa$ mit Lösungen von

$$\mathfrak{M}_x(u) - \varkappa^2 hu = 0 \tag{2}$$

in Zusammenhang gebracht.

Untersuchungen in dieser Richtung sind für den Fall $\mathfrak{M}_x = \Delta$ bei zwei Variablen, $\varkappa$ rein imaginär, $B_p = 0$ und $A = O(1)$ von Sternberg [6] und auch Hammerstein [8] vorgenommen worden. Hier sei die Anzahl der Variablen $n \geqq 2$ beliebig und $\varkappa$ im allgemeinen komplex, jedoch wird der Fall, daß $\varkappa$ rein imaginär ist, ausgeschlossen. Unsere Überlegungen ergänzen die genannten Ergebnisse für $n = 2$.

In den Paragraphen 1 bis 4 werden Bezeichnungen angegeben, benötigte Begriffe zitiert und Hilfssätze zusammengestellt.

Zunächst wird eine Grundlösung für (2) und die zu (2) adjungierte Gleichung konstruiert. Dazu hält man die Variable x in den Koeffizienten von (2) fest und bestimmt explizit eine Grundlösung für eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (§ 5), aus der sich für den allgemeinen Fall eine Grundlösung konstruieren läßt (§ 6). Im folgenden wird dann ihr Verhalten und das ihrer Ableitungen für große Beträge von $\varkappa$ untersucht (§ 7). Dabei kann $\varkappa$ beliebig komplex sein mit folgender Einschränkung: Man konstruiere mit einem beliebig kleinen positiven Winkel zwei Sektoren S_1 und S_2 mit Scheitel im Ursprung und imaginärer Achse als Symmetrielinie. Stets soll dann $\varkappa$ außerhalb dieser Sektoren liegen.

Durch die Grundlösung läßt sich jetzt (1) mit der Fredholmschen Integralgleichung

$$u(x) - \int_T K(x, y; \varkappa)\, u(y)\, d\tau_y = w_1(x) + w(x) \tag{3}$$

verknüpfen und alle Aussagen über die Lösungen von (1) werden aus (3) gewonnen. Dabei bedeuten

$$K(x, y; \varkappa) = Q^*(y, x)\left(A(y) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j(y)}{\partial y_j}\right) - \sum_{j=1}^{n} B_j(y)\, \frac{\partial Q^*(y, x)}{\partial y_j},$$

$$w_1(x) = -\int_T Q^*(y, x)\, D(y)\, d\tau_y$$

und $w(x)$ ein Integral über die Berandung $\mathfrak{F}T$ von T. Ferner ist $Q^*(y, x)$ bzgl. y Grundlösung der zu (2) adjungierten Gleichung.

Man erhält dann folgende Resultate: Ist der Betrag von $\varkappa$ hinreichend groß, so hat die homogene Integralgleichung nur die triviale Lösung. Ist w bzgl. $\varkappa$ beschränkt, so hat auch die Lösung u von (3) diese Eigenschaft. Ferner gilt

$$u = w + R \quad \text{mit} \lim_{|\varkappa| \to \infty} R = 0 \tag{4}$$

gleichmäßig in T.

Ist $|\varkappa|^{-1} \cdot |Dw| \leqq M$, wobei D eine Differentiation bedeutet, so gilt

$$|\varkappa|^{-1} \cdot Du = |\varkappa|^{-1} \cdot Dw + R \quad \text{mit} \lim_{|\varkappa| \to \infty} R = 0$$

gleichmäßig in jedem Bereich $T' < T - \mathfrak{F}T$. Für die Lösungen der homogenen Gleichung (1) läßt sich auch (4) folgern, wenn man lediglich u in geeigneter Weise normiert voraussetzt. Ferner läßt sich zeigen: Jede normierte Lösung w von (2) genügt gleichmäßig in T' den Relationen

$$w = O(|\varkappa|^{\eta}), \quad Dw = O(|\varkappa|^{1+\eta}),$$

wenn die Punkte von T' von dem Rand $\mathfrak{F}T$ von T mindestens den Abstand $|\varkappa|^{-1}$ haben. Hierbei ist der positive Exponent η beliebig klein. Daraus folgert man dann dieselben Beziehungen für die Lösungen u der homogenen Gleichung (1).

Mit Hilfe der Grundlösung lassen sich Greensche Funktionen für die erste Randwertaufgabe $u(x) = \varphi(x)$ für $x \in \mathfrak{F}T$ bzw. die zweite Randwertaufgabe $\mathfrak{P}(u) = \varphi(x)$ für $x \in \mathfrak{F}T$ bestimmen, die im folgenden auf ihre $\varkappa$-Abhängigkeit untersucht werden (§ 9, 10). Dann läßt sich zeigen (§ 11):

Falls $\varphi \not\equiv 0$ ist, hat die Gleichung (1) mit $D \equiv 0$ oder $D \not\equiv 0$ für hinreichend großen Betrag von $\varkappa$ weder eine Lösung der ersten noch der zweiten Randwertaufgabe, unabhängig von dem Verhalten der Koeffizienten A, B, D bezüglich $\varkappa$. Für $\varphi \equiv 0$ besitzt die inhomogene erste und zweite Randwertaufgabe je genau eine Lösung, die sich bei der homogenen Gleichung (1) auf die triviale Lösung reduziert.

Abschließend ist zu bemerken, daß sich viele Überlegungen auch auf elliptische Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen lassen.

§ 1. Bezeichnungen.

Im folgenden werden mit $x, y, \ldots$ stets Punkte des euklidischen n-dimensionalen Raumes R_n bezeichnet. Es steht also x abkürzend für das n-tupel reeller Zahlen $(x_1, \ldots, x_n)$. Ist A eine beliebige Punktmenge des R_n, so sei $\mathfrak{F}A$ die Menge der Randpunkte. Unter einem Gebiet verstehe man stets eine offene und zusammenhängende Punktmenge. Als Bereich bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle eines Gebietes, das ist also dann eine perfekte Menge, die zusammenhängend ist, und bei der jeder Punkt einen Häufungspunkt von inneren Punkten darstellt.

Mit $C^{(k)}[C^{(k,\lambda)}]$ bezeichnen wir die Klasse der Funktionen $f(x)$, die in einem vorgegebenen beschränkten Bereich T stetige partielle Ableitungen bis einschließlich der k-ten Ordnung besitzen [die k-ten Ableitungen genügen in T gleichmäßig einer Hölder-Bedingung zum Exponenten $\lambda > 0$]. Für $k = 0$ bedeutet $C^{(0)}$ $[C^{(0,\lambda)}]$ die Klasse der stetigen [Hölder-stetigen] Funktionen.

Ist $f(x)$ in einem Gebiet C definiert, so sagt man, $f(x)$ ist in C aus der Klasse $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$, wenn $f(x)$ in jedem Bereich T mit $T < C$ aus $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$ ist.

Ist T ein Bereich, so liege $f(x)$ in T in der Klasse $L^{(p)}$, wenn $|f(x)|^p$ Lebesgueintegrabel in T ist. Mit $L^{(\infty)}$ werde die Klasse der in T beschränkten und meßbaren Funktionen bezeichnet.

Über die im folgenden auftretenden Bereiche müssen noch Voraussetzungen bezüglich ihres Randes gemacht werden. Ist x ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{F}T$, so werde x als Ursprung eines n-dimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystems $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ genommen, und zwar habe die ξ_n-Achse die Richtung der äußeren Normalen $\bar{n}$ an $\mathfrak{F}T$ in x. Dann gebe es eine Hyperkugel $S(x)$ mit dem Mittelpunkt x, so daß derjenige Teil von $\mathfrak{F}T$, der in $S(x)$ liegt, sich in der Form

$$\xi_n = \zeta(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \tag{1}$$

darstellen läßt. Die Funktion ζ sei dann in einem geeigneten Gebiet des R_{n-1} definiert und liege dort in der Klasse $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$. Es sei stets $k \geqq 1$. Läßt sich für eine Umgebung eines jeden Punktes $x \in \mathfrak{F}T$ eine Darstellung (1) mit $\zeta \in C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$ finden, so sagt man, T liegt in der Klasse $A^{(k)}$ $[A^{(k,\lambda)}]$.

Die Hyperebene $\xi_n = 0$ ist dann Tangentialebene an $\mathfrak{F}T$ in x, die Richtungskosinus $X_i(x)$ der äußeren Normalen $\bar{n}$ sind stetige Funktionen auf $\mathfrak{F}T$.

Es läßt sich unter diesen Voraussetzungen auch $\mathfrak{F}T$ in Form von Parameterdarstellungen

$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_{n-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

stückweise darstellen. Dabei sind die x_i stetige Funktionen in einem beschränkten Bereich D des R_{n-1} der t_i. Es gilt dann:

1. Die Funktionen (2) vermitteln eine eineindeutige Abbildung von D auf einen Teil von $\mathfrak{F}T$.

2. Ist T aus $A^{(k)}$ $[A^{(k,\lambda)}]$, so sind die x_i aus $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$ in D.

3. Bezeichnet man mit Ω^2 die Summe der Quadrate sämtlicher $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten der Funktionalmatrix $\dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}$, so ist Ω^2 stets positiv in D.

4. Für die Richtungskosinus gilt $X_i = \Omega^{-1} \dfrac{\partial(x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}$.

Jede auf $\mathfrak{F}T$ definierte Funktion $f(x)$ kann auch stückweise als Funktion der t_i aufgefaßt werden, wenn $\mathfrak{F}T$ stückweise die Darstellung (2) zuläßt. Ist $f(x)$ als Funktion der t_i in D aus der Klasse $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$, so sagen wir: f gehört zur Klasse $C^{(k)}$ $[C^{(k,\lambda)}]$ auf $\mathfrak{F}T$.

§ 2. Formulierung der Randwertaufgaben.

In den folgenden Überlegungen spielt der Differentialoperator

$$\mathfrak{M}(u) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_{p=1}^{n} b_p(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_p} + c(x)\, u(x) \tag{3}$$

mit reellen Koeffizienten eine fundamentale Rolle. Falls es nötig ist, werden die Variablen, nach denen differenziert wird, durch einen Index angedeutet, z. B. $\mathfrak{M}_x$.

Die $n^2 + n + 1$ Funktionen $a_{pq}(x)$, $b_p(x)$, $c(x)$ seien in einem beschränkten Gebiet C des R_n definiert und mögen dort zu den Klassen $C^{(2)}$, $C^{(1)}$ bzw. $C^{(1)}$ gehören. Ferner sei $a_{pq}(x) = a_{qp}(x)$ und die quadratische Form

$$\sum_{p,q} a_{pq}(x)\, y_p y_q \tag{4}$$

für beliebige $x \in C$ und beliebige y aus R_n positiv definit. Dann ist $A(x) = \operatorname{Det}(a_{pq}(x))$ positiv und A aus $C^{(2)}$ in C. Der Operator (3) ist also elliptisch. Bezeichnet man mit $A_{pq}(x)$ die Adjunkte von $a_{pq}(x)$ in der Determinante A, dividiert durch A, so ist auch $A_{pq}(x)$ aus $C^{(2)}$ und die Form

$$\sum_{p,q} A_{pq}(x)\, y_p y_q \tag{5}$$

für $x \in C$ und $y \in R_n$ ebenfalls symmetrisch und positiv definit.

Neben (3) interessiert der adjungierte Differentialoperator

$$\mathfrak{M}^*(u) = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial^2 (a_{pq}(x)\, u(x))}{\partial x_p \partial x_q} - \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial (b_p(x)\, u(x))}{\partial x_p} + c(x)\, u(x). \tag{3*}$$

Setzt man $e_p = b_p - \sum_q \dfrac{\partial a_{pq}}{\partial x_q}$ $(p = 1, \ldots, n)$, so ist $e_p \in C^{(1)}$ in C, und man kann statt (3) und (3*) auch schreiben:

$$\mathfrak{M}(u) = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(a_{pq}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_q}\right) + \sum_{p=1}^{n} e_p(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_p} + c(x)\, u(x) \tag{3}$$

bzw.

$$\mathfrak{M}^*(u) = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(a_{pq}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_q}\right) - \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_p}\left(e_p(x)\, u(x)\right) + c(x)\, u(x). \tag{3*}$$

Der Operator $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann selbstadjungiert, d. h. es ist $\mathfrak{M}(u) \equiv \mathfrak{M}^*(u)$, wenn $e_p(x) = 0$ für alle p und alle x gilt.

Sind $u(x)$ und $v(x)$ aus $C^{(2)}$ in C, so ist

$$v\mathfrak{M}(u) - u\mathfrak{M}^*(v) = \sum_{p,q} \frac{\partial}{\partial x_p}\left[a_{pq}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_q} - u\frac{\partial v}{\partial x_q}\right)\right] + \sum_p \frac{\partial}{\partial x_p}(e_p uv).$$

Wir setzen mit den in § 1 definierten Funktionen $X_q(x)$ mit x auf $\mathfrak{F}T$

$$(6) \qquad \begin{aligned} Y_p(x) &= \frac{1}{a}\sum_q a_{pq}(x)\, X_q(x) \quad \text{und} \\ a^2 &= \sum_p\Big(\sum_q a_{pq} X_q\Big)^2; \end{aligned}$$

dann ist $\sum_p Y_p^2(x) = 1$. Die Größen $Y_p(x)$ sind die Richtungskosinus der äußeren Konormalen $\bar{\nu}$ im Punkte x (man vgl. [1], S. 6).

Ist der Bereich T echt enthalten in C und T aus $A^{(1)}$, so gilt die Greensche Formel

$$(7) \qquad \int_T (v\mathfrak{M}(u) - u\mathfrak{M}^*(v))\, d\tau = \int_{\mathfrak{F}T}\left[a\left(v\frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} - u\frac{\partial v}{\partial \bar{\nu}}\right) + buv\right] d\sigma,$$

wobei $b = \sum_p e_p X_p$ gesetzt wurde.

Es werde nun an die Formulierung der Randwertaufgaben für die Gleichung

$$(8) \qquad \mathfrak{M}(u) = f$$

erinnert. Es sei $f(x)$ aus $C^{(1)}$ in C und auf $\mathfrak{F}T$ seien drei Funktionen $\alpha(x)$, $\beta(x)$ und $\varphi(x)$ gegeben, so daß $|\alpha| + |\beta| > 0$ auf $\mathfrak{F}T$ ist.

Gesucht wird eine Funktion $u(x)$, die den folgenden drei Bedingungen genügt:

1. *In $T - \mathfrak{F}T$ ist $u(x)$ eine reguläre Lösung von* (8), *d. h. es ist $u \in C^{(2)}$ in $T - \mathfrak{F}T$ und u erfüllt in $T - \mathfrak{F}T$ die Differentialgleichung* (8).

2. *In T ist $u(x)$ stetig.*

3. *In jedem Punkt x von $\mathfrak{F}T$, in dem $\alpha(x) \neq 0$ ist, besitze $u(x)$ eine Ableitung in der Konormalen-Richtung $\bar{\nu}$, und es gelte*

$$(9) \qquad \alpha(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{\nu}} + \beta(x)\, u(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathfrak{F}T.$$

Die erste Randwertaufgabe (Dirichletsches Problem) erhält man für $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 1$. Bei der zweiten Randwertaufgabe (Neumannsches Problem) sei durchweg $\alpha > 0$, und man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha = a$ (man vgl. (6)) setzen; dann lautet die Bedingung (9)

$$(10) \qquad \sum_{p,q} a_{pq}(x)\, X_p(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_q} + \beta(x)\, u(x) = \varphi(x),$$

wenn die Ableitungen von u auf $\mathfrak{F}T$ stetig sind. Andere Randwertaufgaben werden hier nicht betrachtet.

Wir können jetzt die Greensche Formel (7) umschreiben in

$$(11) \qquad \int_T (v\mathfrak{M}(u) - u\mathfrak{M}^*(v))\, d\tau = \int_{\mathfrak{F}T} (v\mathfrak{P}(u) - u\mathfrak{Q}(v))\, d\sigma,$$

hierbei bedeutet

$$(12) \qquad \mathfrak{P}(u) = a\frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} + \beta u = \sum_{p,q} a_{pq} X_p \frac{\partial u}{\partial x_q} + \beta u$$

und

$$(13)\qquad \mathfrak{Q}(v) = a\frac{\partial v}{\partial \nu} + (\beta - b)\, v = \sum_{p,q} X_p \frac{\partial}{\partial x_q}(a_{pq} v) + \left(\beta - \sum_p b_p X_p\right) v.$$

Die Funktion $\beta(x)$ sei stetig auf $\mathfrak{F}T$. Dann lautet wegen (10) die Randbedingung für die Neumannsche Aufgabe

$$(14)\qquad \mathfrak{P}(u) = \varphi.$$

Unter dem adjungierten Problem zu einer gegebenen Randwertaufgabe versteht man die Bestimmung einer in $T - \mathfrak{F}T$ regulären Lösung der Gleichung

$$(8^*)\qquad \mathfrak{M}^*(v) = g(x)$$

mit der Randbedingung $v = \psi$ auf $\mathfrak{F}T$ im Dirichletschen bzw. $\mathfrak{Q}(v) = \psi$ im Neumannschen Fall. Dabei ist g in T und ψ auf $\mathfrak{F}T$ definiert.

§ 3. Levische Funktionen. Stokessche Formel.

Neben (3) und (3*) benutzen wir die Differentialoperatoren

$$(15)\qquad \mathfrak{M}_{xy}(u) = \sum_{p,q} a_{pq}(y) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_p b_p(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_p} + c(y)\, u(x)$$

und

$$(15^*)\qquad \mathfrak{M}^*_{xy}(u) = \sum_{p,q} a_{pq}(y) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_p \partial x_q} - \sum_p b_p(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_p} + c(y)\, u(x).$$

Hierbei ist y als Parameter aufzufassen; für ein festes y sind dies Operatoren mit konstanten Koeffizienten. Zur Abkürzung setzen wir

$$(16)\qquad \begin{aligned} \pi(x, y) &= \sum_{p,q} a_{pq}(y)\,(x_p - y_p)\,(x_q - y_q), \\ \sigma(x, y) &= \sum_{p,q} A_{pq}(y)\,(x_p - y_p)\,(x_q - y_q), \\ \tau(x, y) &= \tfrac{1}{2} \sum_{p,q} A_{pq}(y)\, b_p(y)\,(x_q - y_q). \end{aligned}$$

Die Funktionen $\pi(x, y)$ und $\sigma(x, y)$ sind für alle (x, y) aus dem kartesischen Produkt $C \times C$ definiert und positiv, falls $x \neq y$ ist (man vgl. (4), (5)). Nur für $x = y$, d. h. $x_p = y_p$ für $p = 1, \ldots, n$, werden π und σ gleich Null. Durch Einführung n-dimensionaler Polarkoordinaten um y als Pol erkennt man sofort die Gültigkeit der Ungleichungen

$$(17)\qquad \begin{gathered} gr \leqq \pi^{\frac{1}{2}}(x, y) \leqq Gr, \quad gr \leqq \sigma^{\frac{1}{2}}(x, y) \leqq Gr, \quad g'r \leqq \tau(x, y) \leqq G'r \\ \left(r^2 = \sum_p (x_p - y_p)^2\right) \end{gathered}$$

für beliebige x und y aus einem Bereich $T < C$. Die positiven Konstanten g, G, G' sowie das nichtnegative g' hängen nur von T ab. Wir setzen

$$(18)\qquad H(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\,\omega_n \sqrt{A(y)}}\, \sigma^{\frac{2-n}{2}}(x, y) & \text{für } n > 2, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi\sqrt{A(y)}} \log \sigma^{\frac{1}{2}}(x, y) & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Hierbei ist

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

die Oberfläche der Einheitshyperkugel des R_n. Wie man sofort nachrechnet, erfüllt $H(x, y)$ für $x \neq y$ die Differentialgleichung

$$\sum_{p,q} a_{pq}(y) \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x_p \partial x_q} = 0. \tag{19}$$

Mit den Abschätzungen (17) erkennt man die bezüglich y gleichmäßige Gültigkeit der Relationen

$$H(x, y) = \begin{cases} O(r^{2-n}) & \text{für } n > 2, \\ O\left(\log \frac{2R_0}{r}\right) & \text{für } n = 2 \end{cases} \tag{20}$$

für jeden Bereich T aus C. Hierbei wurde der Durchmesser R_0 von T eingeführt, um zu erreichen, daß der Logarithmus positiv ist. Für alle $n \geqq 2$ gilt gleichmäßig in T

$$D_x^m H(x, y) = O(r^{2-n-m}) \qquad (m = 1, 2, 3). \tag{20}$$

Mit D_x^m werde eine beliebige partielle Ableitung nach den x_p von der Ordnung m bezeichnet.

Eine für alle (x, y) aus $C \times C$ mit $x \neq y$ stetige Funktion $L(x, y)$, die außerdem stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung bezüglich aller x_p für $x \neq y$ besitzt, heiße eine Levische Funktion, wenn sie in jedem beschränkten Bereich T aus C die folgenden Relationen erfüllt:

Für $n > 2$ sei mit geeignetem positivem λ für $m = 0, 1, 2$

$$D_x^m(L(x, y) - H(x, y)) = O(r^{\lambda+2-n-m}); \tag{21}$$

für $n = 2$ sei mit $\lambda > 0$

$$\begin{gathered} L - H = O(1), \; D_x(L - H) = O\left(\log \frac{2R_0}{r}\right), \\ D_2^x(L - H) = O(r^{-\lambda}). \end{gathered} \tag{21}$$

Ist $a_{pq} \in C^{(0,\lambda)}$, so gilt wegen (19) bis (21)

$$\mathfrak{M}_x[L(x, y)] = \sum_{p,q} (a_{pq}(x) - a_{pq}(y)) \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x_p \partial x_q} + O(r^{\lambda-n}) = O(r^{\lambda-n}). \tag{22}$$

Analog ist

$$\mathfrak{M}_x^*(L(x, y)) = O(r^{\lambda-n}). \tag{23}$$

Wir setzen nun in der Greenschen Formel (11) $v(x) = L(x, y)$, wobei L eine beliebige Levische Funktion bedeutet und y ein beliebiger Punkt aus $T - \mathfrak{F}T$ ist. Mit $I(y; \varrho)$ bezeichnen wir die Gesamtheit der Punkte x, die der Ungleichung

$$\sum_{p,q} A_{pq}(y)\,(x_p - y_p)\,(x_q - y_q) \leqq \varrho^2 \tag{24}$$

genügen; hierbei sei ϱ so klein gewählt, daß $I(y; \varrho) < T - \mathfrak{F}T$ ist. Wendet man jetzt (11) mit diesem v auf den Bereich $T - I + \mathfrak{F}I$ an, so ergibt sich beim Grenzübergang $\varrho \to 0$ durch die üblichen Schlüsse die Stokessche Formel

$$\begin{aligned} u(y) = &\int_T [u(x)\,\mathfrak{M}_x^*(L(x, y)) - L(x, y)\,\mathfrak{M}_x(u(x))]\,d\tau_x \\ &+ \int_{\mathfrak{F}T} [L(x, y)\,\mathfrak{P}_x(u(x)) - u(x)\,\mathfrak{Q}_x(L(x, y))]\,d\sigma_x. \end{aligned} \tag{25}$$

Das uneigentliche Integral über T existiert wegen (20) bis (23).

Genügt eine Levische Funktion $L(x, y)$ für $x \neq y$ in C der Differentialgleichung $\mathfrak{M}_x(u) = 0$ $(\mathfrak{M}_x^*(u) = 0)$, so heißt L Grundlösung der entsprechenden Gleichung.

Unter einer Greenschen Funktion $G(x, y)$ zu einem gegebenen Randwertproblem in $T + \mathfrak{F}T$ versteht man dann eine Funktion, die bezüglich y Grundlösung der adjungierten Differentialgleichung ist und die homogene Randbedingung des adjungierten

Problems erfüllt. Zur Gleichung $\mathfrak{M}(u) = f(x)$ in T mit $u(x) = \varphi(x)$ oder $\mathfrak{P}(u) = \varphi(x)$ auf $\mathfrak{F}T$ muß die zugehörige Greensche Funktion $G(x, y)$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\mathfrak{M}_y^*(G(x, y)) = 0 \text{ für } y \in T - \mathfrak{F}T - x$$

und

$$G(x, y) = 0 \text{ für } y \in \mathfrak{F}T,\ x \in T - \mathfrak{F}T$$

oder

$$\mathfrak{D}_y(G(x, y)) = 0 \text{ für } y \in \mathfrak{F}T,\ x \in T - \mathfrak{F}T.$$

§ 4. Hilfssätze.

Es sind jetzt für das Folgende einige Hilfssätze zusammenzustellen. Mit T werde wieder ein beschränkter Bereich der Klasse $A^{(1,\lambda)}$ bezeichnet. Ferner sei $K(x, y)$ in dem kartesischen Produkt $T \times T$ definiert und für alle Paare (x, y) aus $T \times T$ stetig, falls $x \neq y$ ist. Dann heiße

$K(x, y)$ zur Klasse $N^{(\alpha)}$ gehörig mit $\alpha < n$, wenn in T die Beziehung $K(x, y) = O(r^{\alpha - n})$ gleichmäßig erfüllt ist;

$K(x, y)$ zur Klasse $N^{(n)}$ gehörig, wenn in T die Beziehung $K(x, y) = O\left(\log \frac{2R_0}{r}\right)$ gleichmäßig erfüllt ist;

$K(x, y)$ zur Klasse $N^{(\alpha)}$ gehörig mit $\alpha > n$, wenn K in ganz $T \times T$ stetig ist.

Es gelten für Funktionen

$$U(x, y) = \int_T K_1(x, t)\, K_2(t, y)\, d\tau_t \quad \text{und}$$

$$V(x, y) = \int_{\mathfrak{F}T} K_1(x, t)\, K_2(t, y)\, d\sigma_t \qquad (x, y \in \mathfrak{F}T)$$

folgende Aussagen (man vgl. hierzu [1], S. 18/19).

4. 1. *Ist $K_1 \in N^{(\alpha)}$ und $K_2 \in N^{(\beta)}$ mit $\alpha, \beta > 0$, so ist $U \in N^{(\alpha+\beta)}$.*

4. 2. *Ist $K_1 \in N^{(\alpha)}$ und $K_2 \in N^{(\beta)}$ mit $\alpha, \beta > 1$, so ist $V \in N^{(\alpha+\beta-1)}$.*

Es sei $K(x, y)$ aus $N^{(\alpha)}$, und es gelte für ein λ und α mit $0 < \lambda \leqq 1$, $\lambda \leqq \alpha$ gleichmäßig für beliebige x', x'' und y aus T die Relation

$$K(x', y) - K(x'', y) = O(r_{x'x''}^{\lambda} \cdot \varrho^{\alpha - \lambda - n}),$$

wobei ϱ die kleinste Entfernung des Punktes y von den Punkten der Strecke $x' \cdots x'$, darstellt; dann sagt man, K ist eine Funktion der Klasse $N^{(\alpha,\lambda)}$. Man sieht unmittelbar' daß für $\alpha > n$ und $\lambda \leqq \alpha - n$ die Funktion K aus $N^{(\alpha,\lambda)}$ eine H-Bedingung zum Exponenten λ bezüglich x gleichmäßig für alle y aus T erfüllt.

4. 3. *Für $\mu < \lambda$ gilt $N^{(\alpha,\lambda)} < N^{(\alpha,\mu)}$, $\lambda, \mu \leqq 1$; $\lambda, \mu \leqq \alpha$.*

4. 4. *Ist $K \in N^{(\alpha)}$, $K_{x_j} \in N^{(\alpha-1)}$, so gilt $K \in N^{(\alpha,\lambda)}$ mit beliebigem $\lambda \leqq 1$, $\lambda \leqq \alpha$.*

4. 5. *Ist $K \in N^{(\alpha)}$ mit $\alpha \leqq 1$ und*

$$K(x, y) = (z(x) - z(y))\, K_0(x, y)$$

mit $z \in C^{(0,\alpha)}$, $K_0 \in N^{(0)}$, $K_{0x_j} \in N^{(-1)}$, so ist $K \in N^{(\alpha,\lambda)}$, wie man leicht sieht.

4. 6. *Es sei $K_1 \in N^{(\alpha,\lambda)}$, $K_2 \in N^{(\beta)}$ mit $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Ist $\alpha + \beta \leqq n$, so ist $U \in N^{(\alpha+\beta,\mu)}$ mit $\mu \leqq \lambda$, $\mu < \alpha$; ist $\alpha + \beta > n$, $\beta \leqq n$, so ist $U \in N^{(\alpha+\beta,\mu)}$ mit $\mu \leqq \lambda$, $\mu < \alpha + \beta - n$; ist $\beta > n$, so ist $U \in N^{(\alpha+\beta,\mu)}$ mit $\mu \leqq \lambda$, $\mu < \alpha$.*

4. 7. *Es sei $K_1 \in N^{(\alpha,\lambda)}$, $K_2 \in N^{(\beta)}$ mit $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Ist $\alpha + \beta \leqq n + 1$, so ist $V \in N^{(\alpha+\beta-1,\mu)}$ mit $\mu \leqq \lambda$, $\mu < \alpha - 1$; ist $\alpha + \beta > n + 1$, $\beta \leqq n$, so ist $V \in N^{(\alpha+\beta-1,\mu)}$*

mit $\mu \leqq \lambda$, $\mu < \alpha + \beta - n - 1$; *ist* $\beta > n$, *so ist* $V \in N^{(\alpha+\beta-1,\mu)}$ *mit* $\mu \leqq \lambda$, $\mu < \alpha - 1$. (Für die Beweise vgl. man [2].) Für die Funktionen

$$u(x) = \int_T K(x, y)\, z(y)\, dt_y$$

und

$$v(x) = \int_{\mathfrak{F}T} K(x, y)\, \zeta(y)\, d\sigma_y$$

benötigen wir die folgenden Aussagen (man vgl. [1], S. 20/23):

4. 8. *Ist* $z(x)$ $[\zeta(x)]$ *aus* $L^{(\infty)}$ *in* T *[auf* $\mathfrak{F}T$*] und* $K \in N^{(\alpha)}$ *mit* $\alpha > 0\,[\alpha > 1]$, *so ist* $u(x)$ $[v(x)]$ *aus* $C^{(0)}$ *in* T.

4. 9. *Ist* $z(x)$ $[\zeta(x)]$ *aus* $L^{(\infty)}$ *in* T *[auf* $\mathfrak{F}T$*] und* $K \in N^{(\alpha,\lambda)}$ *mit* $\alpha > 0\,[\alpha > 1]$, *so ist* $u(x)$ $[v(x)]$ *aus* $C^{(0,\mu)}$ *in* T *mit* $\mu \leqq \lambda$, $\mu < \alpha$ $[\mu < \alpha - 1]$.

4. 10. *Ist* $z \in L^{(\infty)}$, $K \in N^{(\alpha)}$, $K_{x_j} \in N^{(\alpha-1)}$ *mit* $\alpha > 1$, *dann ist* $u \in C^{(1)}$ *und*

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \int_T \frac{\partial K(x, y)}{\partial x_j}\, z(y)\, d\tau_y.$$

4. 11. *Ist* $\zeta \in L^{(1)}$, $K \in N^{(\alpha)}$, $K_{x_j} \in N^{(\alpha-1)}$ *mit* $\alpha > 1$, *dann ist* $v_{x_j} \in L^{(1)}$ *in* T. *Ferner gilt*

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_j} = \int_{\mathfrak{F}T} \frac{\partial K(x, y)}{\partial x_j}\, \zeta(y)\, d\sigma_y$$

und v_{x_j} *ist stetig in* $T - \mathfrak{F}T$.

Als nächsten Satz betrachten wir eine Verallgemeinerung von 4. 10.

4. 12. *Es sei* $K_1 \in N^{(\alpha)}$, $K_{1x_j} \in N^{(\alpha-1)}$, $K_2 \in N^{(\beta)}$ *mit* $\alpha > 1$, $\beta > 0$. *Dann ist*

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x_j} = \int_T \frac{\partial K_1(x, t)}{\partial x_j}\, K_2(t, y)\, d\tau_t \quad \textit{und} \quad U_{x_j} \in N^{(\alpha+\beta-1)}.$$

Beweis. Es sei x, y fest, $x \neq y$ und ϱ kleiner als r_{xy} gewählt. Nun werde die Funktion $U(x, y)$ umgeschrieben in

$$U(x, y) = \int_{T - I(y;\varrho)} K_1(x, t)\, K_2(t, y)\, d\tau_t + \int_{I(y;\varrho)} K_1(x, t)\, K_2(t, y)\, d\tau_t,$$

wobei $I(y; \varrho)$ die Menge (24) bedeutet. Für das erste Integral erhält man die Ableitung nach x_j mit Satz 4. 10. Bei dem zweiten Integral konvergiert der Differenzenquotient

$$\frac{1}{h}\,[K_1(x + h, t) - K_1(x, t)]$$

für alle t aus $I(y; \varrho)$ gleichmäßig gegen den entsprechenden Differentialquotienten für $h \to 0$ und der zweite Faktor in dem Integranden ist absolut integrabel über $I(y; \varrho)$. Damit ist dann die Differenzierbarkeit unter dem Integralzeichen auch hier gesichert. Mit 4. 1 folgt dann der Rest der Behauptung.

Ein entsprechender Satz läßt sich bei Differentiationen bezüglich der Variablen y aufstellen. Wir beweisen nun einen analogen später häufig zu benützenden Hilfssatz, bei dem die Zahl α gleich 1 ist.

4. 13. *Es sei* $K_1 \in N^{(1)}$, $K_{1x_j} \in N^{(0)}$, $K_2 \in N^{(\beta)}$ *mit* $\beta > 0$ *und* $K_2(x, y)$ *erfülle in* x *eine Hölder-Bedingung zu einem Exponenten* μ *mit* $0 < \mu < 1$ *in jedem Teilbereich* T' *von* T, *der* y *nicht enthält. Ferner sei gleichmäßig in* T

$$\frac{\partial}{\partial x_j} K_1(x, y) - \frac{\partial}{\partial y_j} K_1(y, x) = O(r_{xy}^{\nu-n}), \quad K_1(x, y) + K_1(y, x) = O(r_{xy}^{\nu+1-n})$$

mit $\nu > 0$. *Dann gilt*

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = \int\limits_T \left(\frac{\partial K_1(x,t)}{\partial x_j} K_2(t,y) - \frac{\partial K_1(t,x)}{\partial t_j} K_2(x,y)\right) d\tau_t + K_2(x,y) \int\limits_{\mathfrak{F}T} K_1(t,x)\, X_j(t)\, d\sigma_t,$$

und es ist $U_{x_j} \in N^{(\beta)}$ *in jedem Bereich* $T' \subset T - \mathfrak{F}T$, $T' \in A^{(1,\lambda)}$.

Beweis. Es sei y fest aus T und x variiere in einem Bereich $T' \subset T - \mathfrak{F}T$, der y nicht enthält. Dann sei $\varrho < \operatorname{Min}\limits_{x \in T'} r_{xy}$ gewählt und mit diesem ϱ die Menge $I(x;\varrho)$ gebildet. Für ein beliebiges x aus T' setzen wir

$$\varphi(x,y;\varrho) = \int\limits_{T-I(x;\varrho)} K_1(x,t)\, K_2(t,y)\, d\tau_t;$$

dann gilt $\lim\limits_{\varrho\to 0} \varphi(x,y;\varrho) = U(x,y)$ gleichmäßig für alle x aus T'. Berechnet man jetzt $\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x,y;\varrho)$, so erhält man einen Term durch die Differentiation nach x_j unter dem Integralzeichen und einen zweiten Term durch Beachtung der x-Abhängigkeit von $I(x;\varrho)$. Bildet man den entsprechenden Differenzenquotienten und geht man zum Limes über, so ergibt sich dann insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x,y;\varrho) = \int\limits_{T-I(x;\varrho)} \frac{\partial}{\partial x_j} K_1(x,t)\, K_2(t,y)\, d\tau_t - \int\limits_{\mathfrak{F}I(x;\varrho)} K_1(x,t)\, K_2(t,y)\, X_j(t)\, d\sigma_t.$$

Die Differentiation unter dem Integralzeichen ist gerechtfertigt, da der entsprechende Differenzenquotient des ersten Faktors für alle t aus $T - I + \mathfrak{F}I$ gleichmäßig gegen den Differentialquotienten konvergiert und das Integral über den Betrag des zweiten Faktors existiert. Obiger Ausdruck wird nun mit Hilfe des Gaußschen Satzes umgeformt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \int\limits_{T-I} &\left[\left(\frac{\partial K_1(x,t)}{\partial x_j} - \frac{\partial K_1(t,x)}{\partial t_j}\right) K_2(t,y) + \frac{\partial K_1(t,x)}{\partial t_j}\left(K_2(t,y) - K_2(x,y)\right)\right] d\tau_t \\ &+ K_2(x,y) \int\limits_{\mathfrak{F}T} K_1(t,x)\, X_j(t)\, d\sigma_t - \int\limits_{\mathfrak{F}I} K_1(t,x)\left(K_2(x,y) - K_2(t,y)\right) X_j(t)\, d\sigma_t \\ &- \int\limits_{\mathfrak{F}I} \left(K_1(t,x) + K_1(x,t)\right) K_2(t,y)\, X_j(t)\, d\sigma_t.\end{aligned}$$

Beachtet man jetzt unsere Voraussetzungen, so erkennt man, daß für ϱ gegen Null die Integrale rechts gleichmäßig für alle x aus T' gegen die rechte Seite der Behauptung konvergieren. Für das erste Integral folgt dies aus der Tatsache, daß der Integrand von der Ordnung $O(r_{xt}^{\lambda'-n})$ ist, wobei $\lambda' = \operatorname{Min}(\nu,\mu)$ bedeutet. Die Integranden der letzten beiden Integrale sind von der Ordnung $O(r_{xt}^{\lambda'+1-n})$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt andererseits $\lim\limits_{\varrho\to 0} \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x,y;\varrho) = U_{x_j}(x,y)$, was zu beweisen war.

Nun ist noch zu zeigen, daß $U_{x_j} \in N^{(\beta)}$ in jedem Bereich $T' \subset T - \mathfrak{F}T$ gilt. In obiger Relation ist nach Ausführung des Grenzüberganges $\varrho \to 0$ das Integral über die erste runde Klammer mit dem Faktor K_2 nach 4. 1. aus $N^{(\lambda'+\beta)}$. Der zweite Term des Integranden werde in der Form

$$\frac{\partial K_1(t,x)}{\partial t_j}\, r_{tx}^{\mu} \cdot \frac{K_2(t,y) - K_2(x,y)}{r_{tx}^{\mu}} = \bar{K}_1(t,x)\, \bar{K}_2(t,y,x)$$

geschrieben. Dann ist $\bar{K}_1 \in N^{(\mu)}$, und da $\bar{K}_2$ für alle t aus $T' \subset T - \mathfrak{F}T$ mit $y \notin T'$ beschränkt ist (nach Voraussetzung ist $x \neq y$), kann die x-Abhängigkeit außer acht gelassen werden. Dann ist also $\bar{K}_2 \in N^{(\beta)}$ als Funktion von t und y. Folglich ist nach 4. 1. auch

dieses Integral aus $N^{(\lambda'+\beta)}$. Das Integral über $\mathfrak{F}T$ ist stetig als Funktion von x in $T-\mathfrak{F}T$ und hat stetige partielle Ableitungen nach x_j in $T-\mathfrak{F}T$. Berücksichtigung des Faktors vor dem Integral liefert dann, daß das Produkt aus $N^{(\beta)}$ in $T' < T-\mathfrak{F}T$, $T' \in A^{(1,\lambda)}$, ist. Damit ist Satz 4. 13 vollständig bewiesen.

Ein analoger Satz gilt bei Differentiationen von $U(x, y)$ nach y_j.

Wir führen nun das Raumpotential

$$u(x) = \int_T L(x, y)\, z(y)\, d\tau_y$$

ein. Hierbei ist L eine Levische Funktion, definiert in einem Gebiet C; dort seien die Koeffizienten $a_{pq}(x)$ wenigstens aus $C^{(0,\lambda)}$. Der Bereich T sei in C enthalten und aus $A^{(1,\lambda)}$. Nach (20) und (21) ist $L \in N^{(2)}$, $L_{x_j} \in N^{(1)}$, $L_{x_j x_k} \in N^{(0)}$. Aus 4. 4 mit $\alpha = 1$ folgt daher $L_x \in N^{(1,\mu)}$, wobei $\mu \leqq 1$ bedeutet. Nun ergibt sich aus den Sätzen 4. 10 und 4. 9 die Behauptung:

4. 14. *Ist $z \in L^{(\infty)}$, dann ist $u \in C^{(1,\mu)}$ in C mit beliebigem $\mu < 1$, und es gilt für alle $x \in C$*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u(x) = \int_T \frac{\partial}{\partial x_j} L(x, y)\, z(y)\, d\tau_y.$$

4. 15. *Ist $z \in L^{(\infty)}$, so ist für $x \in C - T$*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u(x) = \int_T \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} L(x, y)\, z(y)\, d\tau_y$$

und $u \in C^{(2)}$ in $C - T$.

4. 16. *Ist $z \in C^{(0,\lambda)}$, so ist $u \in C^{(2)}$ in $T - \mathfrak{F}T$ und für x aus $T - \mathfrak{F}T$ gilt*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u(x) = -\frac{1}{n} A_{jk}(x)\, z(x) + \overset{*}{\int_T} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} L(x, y)\, z(y)\, d\tau_y,$$

wobei das Integral als Hauptwert zu verstehen ist. D. h. es ergibt sich aus dem Integral über $T - I(x; \varrho)$ durch den Grenzübergang $\varrho \to 0$. Erfüllt L sogar die Voraussetzung

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} (L(x, y) - H(x, y)) \in N^{(\lambda,\mu)} \text{ mit } \mu < \lambda,$$

so ist $u \in C^{(2,\mu)}$ in $T - \mathfrak{F}T$ (man vgl. mit (21)).

Diesen Satz erhält man durch die entsprechenden Überlegungen wie bei 4. 13. (man vgl. [1], S. 23/25).

Aus 4. 14 bis 4. 16 folgt nun

4. 17. *Ist $z \in C^{(0,\lambda)}$, so gilt*

$$\mathfrak{M}_x(u(x)) = \begin{cases} \int_T \mathfrak{M}_x(L(x, y))\, z(y)\, d\tau_y & \text{für } x \in C - T, \\ -z(x) + \int_T \mathfrak{M}_x(L(x, y))\, z(y)\, d\tau_y & \text{für } x \in T - \mathfrak{F}T. \end{cases}$$

Wegen (22) steht in der zweiten Zeile unter dem Integral eine integrable Funktion.

4. 18. *Ist $K(x, y) \in N^{(\beta)}$ mit $\beta > 0$ in T und erfüllt K bezüglich x eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ gleichmäßig in jedem Bereich $T' < T$, der y nicht enthält, so gilt für beliebige y aus T*

$$\mathfrak{M}_x\left(\int_T L(x, t)\, K(t, y)\, d\tau_t\right) = \begin{cases} \int_T \mathfrak{M}_x(L(x, t))\, K(t, y)\, d\tau_t & \text{für } x \in C - T, \\ -K(x, y) + \int_T \mathfrak{M}_x(L(x, t))\, K(t, y)\, d\tau_t & \text{für } x \in T - \mathfrak{F}T. \end{cases}$$

Dies erhält man aus dem vorhergehenden Satz, indem man T in zwei Bereiche T_1 und T_2 so zerlegt, daß $x \in T_1$, $y \in T_2$ ist.

Die Funktion

$$v(x) = \int_{\mathfrak{F}T} L(x, y)\, \zeta(y)\, d\sigma_y$$

wird als Potential der einfachen Schicht mit der Dichte $\zeta(y)$ bezeichnet; dabei genüge L und T denselben Voraussetzungen wie eben.

4. 19. *Ist $\zeta \in L^{(1)}$, so sind v, v_{x_j}, $v_{x_j x_k}$ stetig in $T - \mathfrak{F}T$ und $C - T$, sowie $v \in L^{(1)}$ in beliebigem Bereich T' mit $T \leqq T'$ und $T' < C$. Ferner ist $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = v(x_0)$, falls $x_0 \in \mathfrak{F}T$ ist und x gegen x_0 entlang einer Geraden $\bar{l}$ strebt, für die $\cos(\bar{l}, \bar{n}) \neq 0$ ist.* (Man vgl. [1], S. 26.)

Da L wegen 4. 4. aus $N^{(2,\lambda)}$ mit beliebigem $\lambda \leqq 1$ ist, folgt aus 4. 9.:

4. 20. *Für $\zeta \in L^{(\infty)}$ ist $v \in C^{(0,\lambda)}$ mit beliebigem $\lambda < 1$.*

4. 21. *Ist $\zeta \in C^{(0,\lambda)}$, so erfüllt v_{x_j} in $T - \mathfrak{F}T$ und in $C - T$ eine H-Bedingung zum Exponenten λ, und durch stetige Fortsetzung von v_{x_j} in T bzw. $C - (T - \mathfrak{F}T)$ bekommt man eine Funktion aus $C^{(0,\lambda)}$ in T bzw. $C - (T - \mathfrak{F}T)$.* (Man vgl. [3], S. 83, [1], S. 32.)

Es sei x_0 ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{F}T$ und $\bar{l}$ bezeichne wieder eine beliebige Gerade durch x_0, für die $\cos(\bar{l}, \bar{n}) \neq 0$ ist. Läßt man x auf $\bar{l}$ gegen x_0 streben, so erhält man für den Grenzwert der Ableitung $\dfrac{\partial v}{\partial \bar{l}}$ im allgemeinen zwei verschiedene Werte $\left(\dfrac{\partial v(x)}{\partial \bar{l}}\right)^-$ bzw. $\left(\dfrac{\partial v(x)}{\partial \bar{l}}\right)^+$ je nachdem, ob x stets in $T - \mathfrak{F}T$ oder in $C - T$ liegt. Es gilt der Satz ($\bar{l} \equiv \bar{\nu}$):

4. 22. *Für $\zeta \in C^{(0)}$ auf $\mathfrak{F}T$ ist*

$$(\mathfrak{Q}v)^{\pm} = \mp \tfrac{1}{2}\, \zeta(x_0) + \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_x (L(x_0, y))\, \zeta(y)\, d\sigma_y,$$

und das Integral ist stetig in x_0 auf $\mathfrak{F}T$. Hierbei bedeutet $\mathfrak{Q}$ den Operator (13). ([1], S. 28/32.) *Ist $\beta \in C^{(0,\mu)}$ mit $\mu < \lambda$, so ist das Integral aus $C^{(0,\mu)}$* ([1], S. 32).

Wir bemerken für später, daß der Kern

$$\mathfrak{Q}_x (L(x, y)) \text{ aus } N^{(1+\lambda)} \text{ auf } \mathfrak{F}T \tag{26}$$

ist. Dies folgt wegen (13) und (21) aus $\dfrac{\partial H}{\partial \bar{\nu}_x} \in N^{(1+\lambda)}$. Es ist nämlich wegen (6)

$$a \frac{\partial H(x, y)}{\partial \bar{\nu}_x} = C_n(y)\, \sigma^{-\frac{n}{2}}(x, y) \sum_p X_p(y)\, (y_p - x_p) + O(r_{xy}^{1+\lambda-n}) \qquad (n \geqq 2),$$

wie man durch elementare Rechnungen sofort erkennt. Dabei ist $C_n(y)$ bezüglich y aus T beschränkt und hängt noch von n ab. Nimmt man jetzt x als Ursprung eines lokalen n-dimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystems, so gilt in der Umgebung von x für $\mathfrak{F}T$ eine Darstellung der Gestalt (1) $y_n = \zeta(y_1, \ldots, y_{n-1})$. Da $T \in A^{(1,\lambda)}$ ist, folgt in bekannter Weise

$$X_p(y) = O(r_{xy}^{\lambda}) \text{ für } p = 1, \ldots, n-1$$

und

$$y_n - x_n = \zeta(y_1, \ldots, y_{n-1}) = O(r_{xy}).$$

Folglich ist

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{\nu}_x} = O(r_{xy}^{1+\lambda-n}).$$

Schließlich führen wir noch das Potential der Doppelschicht

$$w(x) = \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_y (L(x, y))\, \zeta(y)\, d\sigma_y$$

mit dem Moment $\zeta(y)$ ein. Hierbei ist $\mathfrak{P}$ der Operator aus (12). Es werde angenommen, daß wenigstens $a_{pq}(x) \in C^{(1,\lambda)}$ in C ist und daß für $L(x, y)$ auch die Ableitungen L_{y_p}, $L_{y_p y_q}$ existieren, für $x \neq y$ stetig sind und den Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial y_p}(L(x, y) - H(x, y)) = O(r^{2-n}), \quad \frac{\partial^2}{\partial y_p \partial x_q}(L(x, y) - H(x, y)) = O(r^{1-n})$$

genügen. Außerdem sei $\lambda = 1$ in (21). Wie bei (26) erkennt man, daß

$$\mathfrak{P}_y(L(x, y)) \text{ aus } N^{(1+\lambda)} \text{ auf } \mathfrak{F}T \tag{27}$$

gilt.

4. 23. *Ist $\zeta \in L^{(1)}$, so ist $w \in L^{(1)}$ in T.*

Wenn $\bar{l}$ dieselbe Bedeutung wie früher hat, so erhält man auf $\mathfrak{F}T$ verschiedene Grenzwerte $w^-(x_0)$ bzw. $w^+(x_0)$, wenn x auf $\bar{l}$ gegen x_0 von innen bzw. außen strebt.

4. 24. *Für $\zeta \in L^{(1)}$ gilt*

$$w^{\pm}(x_0) = \pm \tfrac{1}{2}\zeta(x_0) + \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_y(L(x_0, y))\,\zeta(y)\,d\sigma_y.$$

Das Integral rechts ist als Funktion von x_0 auf $\mathfrak{F}T$ aus $L^{(1)}$. Ist $\zeta \in C^{(0)}$, so ist das Integral aus $C^{(0,\mu)}$ mit beliebigem $\mu < 1$, und die Funktionen

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} w(x) & \text{für } x \in T - \mathfrak{F}T, \\ w^-(x) & \text{für } x \in \mathfrak{F}T \end{cases} \qquad \text{bzw. } \bar{w} = \begin{cases} w(x) & \text{für } x \in C - T, \\ w^+(x) & \text{für } x \in \mathfrak{F}T \end{cases}$$

sind stetig in T bzw. $C - (T - \mathfrak{F}T)$.

Ist $L(x, y)$ eine Grundlösung von $\mathfrak{M}_y(L(x, y)) = 0$, so lassen sich durch Überlegungen, die denen von [1], S. 34/35 völlig analog sind, die folgenden beiden Sätze beweisen.

4. 25. *Für $\beta \in C^{(0,\lambda)}$ und $\zeta \in C^{(0,\mu)}$ mit $\mu > 1 - \lambda$ ist das Integral in der Behauptung von 4. 24 aus $C^{(1,\lambda)}$ auf $\mathfrak{F}T$.*

4. 26. *Ist $\zeta \in C^{(0,\lambda)}$ und $\zeta \in C^{(1,\lambda)}$, so sind die durch Fortsetzung wie in 4. 24 erhaltenen Funktionen $\bar{w}$ aus $C^{(1,\lambda)}$ in T bzw. $C - (T - \mathfrak{F}T)$.*

Man rechnet leicht die Gültigkeit der folgenden Relationen nach. Sie werden später öfter gebraucht werden.

4. 27. *Ist $a_{pq}(x) \in C^{(0,\mu)}$ mit $0 < \mu \leqq 1$, so gilt*

$$\begin{aligned}
&H(x, y) - H(y, x) &&= O(r_{xy}^{2-n+\mu}) \quad \text{für } n \geqq 3 \text{ und} \\
&H(x, y) - H(y, x) &&= O(r_{xy}^{\mu'}) \quad \text{mit } \mu' < \mu \text{ für } n = 2; \\
&\frac{\partial}{\partial x_j} H(x, y) + \frac{\partial}{\partial y_j} H(y, x) &&= O(r_{xy}^{1-n+\mu}) \quad \text{für } n \geqq 2; \\
&\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_k} H(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial x_k} H(y, x) &&= O(r_{xy}^{-n+\mu}) \quad \text{für } n \geqq 2; \\
&\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} H(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} H(y, x) &&= O(r_{xy}^{-n+\mu}) \quad \text{für } n \geqq 2; \\
&\frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} H(x, y) + \frac{\partial^3}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l} H(y, x) &&= O(r_{xy}^{-n-1+\mu}) \quad \text{für } n \geqq 2.
\end{aligned}$$

Gilt außer der obigen Voraussetzung noch $b_p(x) \in C^{(0,\mu)}$, so ist

$$\mathfrak{M}_x(H(x, y)) + \mathfrak{M}_y(H(y, x)) = O(r_{xy}^{-n+2\mu}) \text{ für } n \geqq 2.$$

Ist schließlich sogar $a_{pq}(x) \in C^{(1,\mu)}$; $b_p(x)$, $c(x) \in C^{(1)}$, *so wird*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathfrak{M}_x(H(x,y)) - \frac{\partial}{\partial y_j}\mathfrak{M}_y(H(y,x)) = O(r_{xy}^{-n+\mu}) \text{ für } n \geqq 2;$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\mathfrak{M}_x(H(x,y)) - \frac{\partial}{\partial y_j}\mathfrak{M}_y(H(y,x)) = O(r_{xy}^{-n+\mu}) \text{ für } n \geqq 2.$$

§ 5. Grundlösungen für die Gleichung $(\mathfrak{M}_{xy} - \varkappa^2 h(y))\, u(x) = 0$.

Im folgenden werden gewisse Grundlösungen bestimmt und ihre Eigenschaften untersucht. Um Grundlösungen für die Gleichungen (man vgl. (15), (15*))

$$(28) \qquad (\mathfrak{M}_{xy} - \varkappa^2 h(y))\, u(x) = 0$$

bzw.

$$(28^*) \qquad (\mathfrak{M}^*_{xy} - \varkappa^2 h(y))\, u(x) = 0$$

mit $h(x) \in C^{(1)}$ und $h(x) > 0$ in C zu bekommen, machen wir den Ansatz

$$(29) \qquad P(x,y) = kv(x,y)\, w(\sigma(x,y)),$$

wobei $\sigma(x,y)$ die Bedeutung aus (16) hat und k eine von x unabhängige Konstante bedeutet. Setzt man zur Abkürzung

$$v_p = \frac{\partial v}{\partial x_p}, \quad v_{pq} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_p \partial x_q}, \quad \lambda = \sum_p \nu_p (x_p - y_p),$$

$$\mu = \sum_p v_p b_p, \quad \nu = \sum_{p,q} a_{pq} v_{pq},$$

so ergibt sich bei Beachtung von (15), (15*) und (16)

$$(\mathfrak{M}_{xy} - \varkappa^2 h(y))\, P = k[4\sigma v w'' + (2nv + 4\lambda \pm 4\tau v)\, w' + (\nu \pm \mu + \{c - \varkappa^2 h\}\, v)\, w] = 0.$$

Das untere Vorzeichen steht, wenn links statt des Operators $\mathfrak{M}_{xy}$ der adjungierte Operator $\mathfrak{M}^*_{xy}$ genommen wird. Die entsprechende Lösung heiße dann P^*. Zunächst bestimmen wir $v(x,y)$ so, daß $\lambda \pm \tau v = 0$ ist. Dies ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für v. Eine Lösung lautet

$$(30) \qquad v(x,y) = e^{\mp \tau(x,y)} = \exp\left\{\mp \frac{1}{2} \sum_{p,q} A_{pq}(y)\, b_p(y)\, (x_q - y_q)\right\}.$$

Diese Funktion v ist für alle x beliebig oft partiell nach x_p differenzierbar, und v sowie alle Ableitungen bleiben beschränkt für $r_{xy} \to 0$ in jedem Bereich $T < C$.

Damit verbleibt eine Differentialgleichung für $w(\sigma)$:

$$(31) \qquad 4\sigma w''(\sigma) + 2nw'(\sigma) - \alpha^2 w(\sigma) = 0,$$

wobei

$$\alpha^2 = \alpha^2(y) = \varkappa^2 h(y) - c(y) \mp (\mu \pm \nu)\, v^{-1}$$

$$= \varkappa^2 h(y) - c(y) + \frac{1}{4} \sum_{p,q} A_{pq}(y)\, b_p(y)\, b_q(y)$$

bedeutet. Die Differentialgleichung (31) geht durch die Transformation $z = i\alpha\sqrt{\sigma}$ in eine Besselsche Differentialgleichung über; daher lauten die Lösungen von (31) bis auf einen konstanten Faktor ([9], S. 440)

$$(32) \qquad w(\sigma) = \sigma^{-\frac{\nu}{2}} Z_\nu(i\alpha\sqrt{\sigma}) = (i\alpha)^\nu z^{-\nu} Z_\nu(z).$$

Dabei ist Z_ν eine Zylinder-Funktion ν-ter Ordnung und $\nu = \frac{n-2}{2} \geqq 0$. Um die gewünschte Singularität für $z = 0$ zu erhalten, können wir die linear unabhängigen Zylinderfunktionen dritter Art (Hankelsche Funktionen) $H_\nu^{(1)}(z)$ oder $H_\nu^{(2)}(z)$ nehmen. Es ist $H_\nu^{(1)}(z) = \mathfrak{J}_\nu(z) + iN_\nu(z)$, $H_\nu^{(2)}(z) = \mathfrak{J}_\nu(z) - iN_\nu(z)$ und

$$\mathfrak{J}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{iz}{2}\right)^{2l}}{l!\,\Gamma(\nu+l+1)}, \qquad |\arg z| < \pi;$$

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \cos \nu\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{iz}{2}\right)^{2l}}{l!\,\Gamma(\nu+l+1)} - \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{iz}{2}\right)^{2l}}{l!\,\Gamma(-\nu+l+1)}\right],$$

(33) $$\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ |\arg z| < \pi;$$

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi}\mathfrak{J}_n(z) \ln \frac{\gamma z}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\,(n+l)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}\left(\sum_{m=1}^{l}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{l+n}\frac{1}{m}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-l-1)!}{l!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l},$$

(33) $$\ln \gamma = C, \ n = 0, 1, 2, \ldots; \ |\arg z| < \pi.$$

Ferner gilt für $|z| \gg \nu$, $|z| \gg 1$ die asymptotische Entwicklung

(34) $$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left(1 + O(|z|^{-1})\right)$$

([10], S. 25 bzw. 32).

Für $|z| \to 0$ haben die Hankelschen Funktionen die Ordnung $O(|z|^{-\nu})$ für $\nu > 0$, d. h. $n > 2$ bzw. $O(\log |z|^{-1})$ für $\nu = 0$, d. h. $n = 2$. Damit wird wegen (17) in jedem Bereich $T < C$

$$w(\sigma) = \begin{cases} O(r_{xy}^{2-n}) & \text{für } n > 2, \\ O\left(\log \frac{2R_0}{r_{xy}}\right) & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet R_0 den Durchmesser von T. Beachtet man die Differentiationsregel für Zylinderfunktionen

(35) $$\frac{d}{dz} z^{-\nu} Z_\nu(z) = -z^{-\nu} Z_{\nu+1}(z),$$

so folgt für alle $\nu \geqq 0$

$$\frac{d^p w}{dz^p} = O(|z|^{-2\nu-p}) \qquad p = 1, 2, 3$$

für $|z| \to 0$ und damit für $n \geqq 2$

$$\frac{d^p w}{d\sigma^p} = O(r_{xy}^{-n-2p+2}) \qquad p = 1, 2, 3 \ \text{ für } r_{xy} \to 0.$$

Schließlich ergeben sich damit und aus (30) für die Funktion (29) unter Beachtung von (17) die Relationen

(36) $$P = \begin{cases} O(r^{2-n}) & \text{für } n > 2, \\ O\left(\log \frac{2R_0}{r}\right) & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

und für $n \geqq 2$

$$(36)\qquad \frac{\partial P}{\partial x_p} = O(r^{1-n}), \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x_p \partial x_q} = O(r^{-n}), \quad \frac{\partial^3 P}{\partial x_p \partial x_q \partial x_r} = O(r^{-n-1}).$$

Wählt man jetzt den in P noch freien von x unabhängigen Faktor k in geeigneter Weise, so wird P eine Levische Funktion. Wir setzen $Z_\nu = H_\nu^{(1)}$ in (32) und

$$k = k_\nu = \frac{\alpha^\nu(y)\, i^{\nu+1}}{2^{\nu+2}\pi^\nu \sqrt{A(y)}} = \frac{\alpha^\nu i^{\nu+1}}{(n-2)\,\omega_n \sqrt{A(y)}\, 2^\nu} \cdot \begin{cases} \sin \nu\pi\Gamma(-\nu+1) & 2\nu = n-2 \geqq 1 \text{ ungerade,} \\ \dfrac{\pi}{(\nu-1)!} & 2\nu = n-2 > 0 \text{ gerade,} \end{cases}$$

sowie $k_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{A(y)}} \cdot \dfrac{i\pi}{2}$. (Dabei ist ω_n die Oberfläche der Einheitshyperkugel des R_n; man vgl. § 3.)

Dann ist also wegen (29) und (32)

$$(37)\qquad P(x, y) = \begin{cases} k_\nu(y) \cdot \sigma^{-\frac{\nu}{2}}(x, y)\, H_\nu^{(1)}\left(i\alpha\sqrt{\sigma}\right) v(x, y) & \text{für } \nu > 0, \\ k_0 \cdot H_0^{(1)}\left(i\alpha\sqrt{\sigma}\right) v(x, y) & \text{für } \nu = 0, \end{cases}$$

wobei v die Bedeutung aus (30) hat.

Man erkennt nun leicht bei Beachtung von (33), daß $P(x, y)$ eine Levische Funktion darstellt. Die Relationen (21) sind erfüllt mit $\lambda = 1$ für beliebiges $n \geqq 2$. Die Funktionen P bzw. P^* stellen also Grundlösungen von (28) bzw. (28*) dar. Sind die Koeffizienten $a_{pq}(x)$, $b_p(x)$, $c(x)$, $h(x)$ aus $C^{(1)}$ in C, so hat P auch partielle Ableitungen erster Ordnung bezüglich y_j. Man zeigt dann leicht die Gültigkeit der Relationen

$$(38)\qquad \frac{\partial}{\partial y_j}\left(P(x, y) - H(x, y)\right) = \begin{cases} O(r^{2-n}) & \text{für } n > 2, \\ O\left(\log \dfrac{2R_0}{r}\right) & \text{für } n = 2, \end{cases}$$

$$(38)\qquad \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial x_k}(P - H) = O(r^{1-n}), \quad \frac{\partial^3}{\partial y_j \partial x_k \partial x_l}(P - H) = O(r^{-n}) \text{ für } n \geqq 2.$$

Ist $a_{pq} \in C^{(1,\mu)}$, so folgt hieraus mit Satz 4. 27 die Beziehung

$$(39)\qquad \frac{\partial}{\partial y_j}\mathfrak{M}_x(P(x, y)) - \frac{\partial}{\partial x_j}\mathfrak{M}_y(P(y, x)) = O(r^{-n+\mu}).$$

Ist $\varkappa$ reell, so ist α^2 reell und für hinreichend großen Betrag von $\varkappa$ wird $\alpha^2 > 0$ und damit bei Wahl des positiven Vorzeichens der Wurzel auch α positiv. Dann ist $i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}\left(i\alpha\sqrt{\sigma}\right)$ reell, wenn, wie stets im folgenden, für die Potenz von i der Hauptwert genommen wird ([9], S. 438). Folglich ist für reelle $\varkappa$ mit hinreichend großem Betrag auch $P(x, y)$ für alle $\nu \geqq 0$ reell. Bei beliebigem $\varkappa$ ist P im allgemeinen komplex. Da aber P und die Ableitungen P_{x_j}, $P_{x_j x_k}$ als Funktionen von z für alle z regulär sind mit Ausnahme des Punktes $z = 0$, wo diese Funktionen für $\nu > 0$ Pole bzw. für $\nu = 0$ eine logarithmische Singularität besitzen, müssen auch Real- und Imaginärteil von P die gewünschte Singularität für $x = y$ haben. Bei beliebigem $\varkappa$ liefern also $\mathrm{Re}\,(P)$ und $\mathrm{Im}\,(P)$ reelle Grundlösungen. Wählt man bei der Bildung von α die Wurzel so, daß $\sqrt{1} = 1$ ist, so wird stets $\mathrm{Re}\,(\alpha) \geqq 0$, d. h. $\mathrm{Im}\,(z) \geqq 0$.

Für die folgenden Untersuchungen wird das Verhalten von P bzw. P^* und gewisser partieller Ableitungen für große $|\varkappa|$ von Bedeutung sein. Zunächst läßt sich eine Zahl $\varkappa_1 > 1$ so bestimmen, daß für alle y aus dem Bereich $T \subset C$ und alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_1$ gilt

$$\frac{1}{|\varkappa|^2}\left|\frac{1}{4}\sum_{p,q} A_{pq}(y)\, b_p(y)\, b_q(y) - c(y)\right| < \frac{3}{4}\, h_2^2,$$

wobei $h_2^2 = \operatorname*{Min}_{y \in T} h(y)$ bedeutet. Ferner sei $h_1^2 = \operatorname*{Max}_{y \in T} h(y)$. Dann ist für beliebige $y \in T$ und $|\varkappa| > \varkappa_1$, wie man sofort sieht,

$$\tfrac{1}{4}\, h_2^2\, |\varkappa|^2 < |\alpha|^2 < 2 h_1^2\, |\varkappa|^2 \qquad (h_1 > 0,\ h_2 > 0),$$

d. h.

$$0 < h\,|\varkappa| < |\alpha| < H\,|\varkappa| \tag{40}$$

mit $h = \dfrac{h_2}{2}$ und $H = \sqrt{2}\, h_1$.

Es sei φ_0 eine beliebige kleine positive Zahl, kleiner als $\dfrac{\pi}{2}$. Wir legen nun Strahlen durch den Ursprung $\varkappa = 0$ der komplexen $\varkappa$-Ebene, die gegen die Imaginärachse um den Winkel $+\varphi_0$ bzw. $-\varphi_0$ geneigt sind. Durch diese Strahlen werden zwei Sektoren S_1 und S_2 bestimmt, die den Öffnungswinkel $2\varphi_0$ in $\varkappa = 0$ besitzen und als Symmetrielinie die positive bzw. negative imaginäre Achse aufweisen. Läßt man $|\varkappa|$ in beliebiger Weise gegen Unendlich gehen, lediglich unter der Einschränkung, daß $\varkappa$ nicht in den Sektoren S_1 oder S_2 liegt, so ist stets

$$|\operatorname{Arc} \varkappa| \leqq \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{2} + \varphi_0 \leqq |\operatorname{Arc} \varkappa| \leqq \pi,$$

folglich

$$-\pi + 2\varphi_0 \leqq \operatorname{Arc} \alpha^2 \leqq \pi - 2\varphi_0.$$

Dann wird aber auf Grund obiger Festsetzung des Wurzelzweiges

$$-\frac{\pi}{2} + \varphi_0 \leqq \operatorname{Arc} \alpha \leqq \frac{\pi}{2} - \varphi_0,$$

und damit ist für $|\varkappa| > \varkappa_1$ mit (40)

$$\operatorname{Re}(\alpha) = |\alpha| \cos(\operatorname{Arc} \alpha) \geqq |\alpha| \sin \varphi_0 > h\,|\varkappa| \sin \varphi_0 > 0;$$

liegt also $\varkappa$ nicht in S_1 oder S_2, so ist für hinreichend großen Betrag von $\varkappa$

$$\operatorname{Re}(\alpha)\, g - G' > |\varkappa|\, hg \sin \varphi_0 - G' > k'\,|\varkappa|. \tag{41}$$

Das positive k' kann kleiner als 1 angenommen werden. Wir können ferner annehmen, daß $\varkappa_1 > 1$ für (40) schon gleich so groß gewählt war, daß neben (40) auch (41) gilt.

In den folgenden Betrachtungen sei stets $\varkappa$ nicht in der Vereinigung von S_1 und S_2. Wir geben nun Abschätzungen für P und seine Ableitungen an.

Zunächst ist $k_\nu = O(|\varkappa|^\nu)$ für $\nu \geqq 0$ und alle y aus T, $T \subset C$ und $|\varkappa| > \varkappa_1$. Mit (17) folgt aus (30) $0 < v(x, y) \leqq e^{G' r_{xy}} \leqq M$ für alle $(x, y) \in T \times T$.

Nun sei $y \in T$ beliebig, aber fest gewählt und $|\varkappa| > \varkappa_1$ ebenfalls fest. Dann definieren wir drei Mengen M_j $(j = 1, 2, 3)$ von Punkten x, von denen zwei sicher ganz in T liegen, falls $|\varkappa|$ hinreichend groß gewählt wurde:

$x \in M_1 \leftrightarrow r_{yx} \leqq |\varkappa|^{-1}$,

$x \in M_2 \leftrightarrow |\varkappa|^{-1} < r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}$ mit $0 < p < 1$, p fest gewählt,

$x \in M_3 \leftrightarrow |\varkappa|^{-p} < r_{xy}$.

In M_1 ist wegen (17) und (40) $|z| = |\alpha|\sqrt{\sigma} < HG|\varkappa| r_{xy} \leqq HG$, d. h. z ist beschränkt. Nun gilt für $|z| \to 0$

$$|H_\nu^{(1)}(z)| = \begin{cases} O(|z|^{-\nu}) & \text{für } \nu > 0, \\ O\left(\log \dfrac{HG}{|z|}\right) & \text{für } \nu = 0. \end{cases}$$

Wegen $|z| \geqq hg|\varkappa| r$ folgt also weiter aus (37) mit (17) und dem obigen

$$(42') \qquad |P(x, y)| \leqq \begin{cases} C r_{xy}^{-2\nu} & \text{für } \nu > 0, \\ C \log |\varkappa|^{-1} r_{xy}^{-1} & \text{für } \nu = 0. \end{cases}$$

In M_2 ist $hg < |z| \leqq HG|\varkappa|^{1-p}$; für diese z ist $H_\nu^{(1)}(z)$ für $\nu \geqq 0$ regulär. Da andererseits stets $\operatorname{Im}(z) \geqq 0$ ist, und für diese z die Hankelfunktionen $H_\nu^{(1)}(z)$ mit $|z| \to \infty$ gegen Null gehen (man vgl. (34)), so ist $H_\nu^{(1)}(z)$ in M_2 beschränkt. Aus (37) folgt also mit (17)

$$(42'') \qquad |P(x, y)| \leqq C|\varkappa|^{\nu} r_{xy}^{-\nu} \qquad \text{für } \nu \geqq 0.$$

In M_3 ist schließlich $|z| \geqq hg|\varkappa| r_{xy} > hg|\varkappa|^{1-p}$, und für solche z gilt die asymptotische Formel (34). Folglich ist mit (41)

$$(42''') \qquad |P(x, y)| \leqq C|\varkappa|^{\nu-\frac{1}{2}} r_{xy}^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-k'|\varkappa| r_{xy}} \qquad \text{für } \nu \geqq 0.$$

In diesen und den folgenden Abschätzungen bedeutet C stets eine Konstante, die von den gegebenen Funktionen in T abhängt, und die wir uns einheitlich gewählt denken können.

Die Funktion $P(x, y)$ läßt sich nach den x_j beliebig oft und nach den y_j entsprechend unseren Voraussetzungen einmal partiell differenzieren und die entstehenden Ableitungen sind für $x \neq y$ stetig. Bezeichnen wir mit dem Symbol $D^j P(x, y)$ eine Ableitung der j-ten Ordnung von P bezüglich beliebiger Variablen mit der einen Ausnahme, daß nach den y_j nur einmal differenziert werden darf, so finden wir leicht für $\nu \geqq 0$ unter Beachtung der Differentiationsregel der Zylinderfunktionen (35) aus (37) mit (33), (17) und (30):

$$(43) \qquad |D^j P(x, y)| \leqq C \begin{cases} r_{xy}^{-2\nu-j} & \text{in } M_1, \\ |\varkappa|^{\nu+j} r_{xy}^{-\nu} & \text{in } M_2, \\ |\varkappa|^{\nu-\frac{1}{2}+j} r_{xy}^{-\nu-\frac{1}{2}} e^{-k|\varkappa| r_{xy}} & \text{in } M_3. \end{cases}$$

Es ist $D^1 = D$; wir werden nur $j = 1, 2, 3$ benützen. Dieselben Ungleichungen erhält man für P^* und seine Ableitungen. Beachtet man, daß in M_2 die Ungleichung $r_{xy}|\varkappa| \leqq |\varkappa|^{1-p}$ gilt, und daß $|\varkappa| > 1$ ist, so kann man für die Vereinigung $M_1 \cup M_2$ die folgenden schwächeren Ungleichungen angeben:

$$(44) \quad |D^j P(x, y)| \leqq C|\varkappa|^{(1-p)(\nu+j)} r_{xy}^{-2\nu-j} \qquad \nu > 0,\ j = 0;\ \nu \geqq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Dabei ist $D^0 P = P$. Für alle $u \geqq 0$ und positive α gilt $u^\alpha \leqq C_\alpha e^{\frac{u}{2}}$, wobei C_α eine positive nur von α abhängige Konstante darstellt. Damit folgt aus (42''') und (43) für $x \in M_3$

$$(45) \quad |D^j P(x, y)| \leqq C r_{xy}^{-2\nu-j} e^{-k|\varkappa| r_{xy}} \qquad \nu > 0,\ j = 0;\ \nu \geqq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

Dann ist $k = \dfrac{k'}{2}$ und $0 < k < \dfrac{1}{2}$ und C eine von $\varkappa$ und r unabhängige Konstante.

§ 6. Grundlösungen für die Gleichung $(\mathfrak{M}_x - \varkappa^2 h)\, u = 0$.

Um jetzt Grundlösungen für die Gleichungen

$$(46) \qquad (\mathfrak{M}_x - \varkappa^2 h(x))\, u(x) = 0$$

bzw.

$$(46^*) \qquad (\mathfrak{M}_x^* - \varkappa^2 h(x))\, u(x) = 0$$

zu bekommen, macht man die Ansätze (man vgl. [4] S. 123, [5] S. 288)

$$(47) \qquad Q(x, y) = P(x, y) + \int_T P(x, t)\, \Phi(t, y)\, d\tau_t$$

bzw.

$$(47^*) \qquad Q^*(x, y) = P^*(x, y) + \int_T P^*(x, t)\, \Phi^*(t, y)\, d\tau_t$$

mit unbekannten Funktionen $\Phi(x, y)$ bzw. $\Phi^*(x, y)$ und fordert, daß Q der Gleichung (46) bzw. Q^* der Gleichung (46*) für $x \neq y$ genügt. Wir betrachten nur (46) mit (47). Die Behandlung von (47*) geht analog.

Indem wir annehmen, daß Φ die Voraussetzungen von Satz 4. 18 erfüllt, bekommen wir die Gleichung

$$(\mathfrak{M}_x - \varkappa^2 h(x))\, P(x, y) - \Phi(x, y) + \int_T (\mathfrak{M}_x - \varkappa^2 h(x))\, P(x, t)\, \Phi(t, y)\, d\tau_t = 0,$$

falls $x \neq y$ und $x \in T - \mathfrak{F}T$ ist. Setzt man

$$(48) \qquad \begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{M}}_x[u;\, y] = {} & \sum_{p,q} (a_{pq}(x) - a_{pq}(y)) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_p \partial x_q} \\ & + \sum_p (b_p(x) - b_p(y)) \frac{\partial u(x)}{\partial x_p} + (c(x) - c(y))\, u(x), \end{aligned}$$

so ist für $x \neq y$ nach Definition von P

$$(49) \qquad \begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{M}}_x[P;\, y] &= \mathfrak{M}_x(P) - \mathfrak{M}_{xy}(P) = \mathfrak{M}_x(P) - \varkappa^2 h(y)\, P \\ &= (\mathfrak{M}_x - \varkappa^2 h(x))\, P + \varkappa^2 (h(x) - h(y))\, P. \end{aligned}$$

Setzt man abkürzend

$$K(x, y) = \widetilde{\mathfrak{M}}_x[P(x, y);\, y] + (h(y) - h(x))\, \varkappa^2 P(x, y),$$

dann hat man für $\Phi(x, y)$ die Integralgleichung

$$(50) \qquad \Phi(x, y) - \int_T K(x, t)\, \Phi(t, y)\, d\tau_t = K(x, y).$$

Diese Gleichung ist für $x \neq y$ zu erfüllen. Da P eine Levische Funktion ist und die Koeffizienten $a_{pq}(x)$ aus $C^{(2)}$ in C sind, folgt aus (22), daß $K \in N^{(1)}$ ist. Folglich ist auf (50) die Fredholmsche Theorie anwendbar. Die Lösung bekommt man in Form der Neumannschen Reihe

$$(51) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} K^{(m)}(x, y) \qquad (K^{(1)} = K),$$

wobei

$$(52) \qquad K^{(m)}(x, y) = \int_T K(x, t)\, K^{(m-1)}(t, y)\, d\tau_t$$

den m-ten iterierten Kern bedeutet. Wir untersuchen die formal gebildete Reihe. Induktiv zeigt man mit 4. 1, daß $K^{(m)} \in N^{(m)}$ ist. Folglich sind alle $K^{(m)}$ mit $m > n$ für alle $(x, y) \in T \times T$ stetig. Nun werde die $\varkappa$-Abhängigkeit von $K^{(m)}(x, y)$ untersucht, um die Konvergenz der Reihe (51) zeigen zu können. Es ist für $n \geqq 2$ und $|\varkappa| > \varkappa_1 > 1$:

$$(53) \qquad |K(x, y)| \leqq C \begin{cases} r_{xy}^{-2\nu+1} & \qquad |\varkappa|^q r_{xy}^{1-n} \quad \text{in } M_1, \\ |\varkappa|^{\nu+2} r_{xy}^{-\nu+1} & \text{bzw.} \quad |\varkappa|^q r_{xy}^{1-n} \quad \text{in } M_2, \\ |\varkappa|^{\nu+\frac{3}{2}} r^{-\nu+\frac{1}{2}} e^{-k'|\varkappa| r_{xy}} & \qquad r_{xy}^{1-n} e^{-k|\varkappa| r_{xy}} \text{ in } M_3. \end{cases}$$

Hierbei ist $q = (1-p)(\nu+2) = \frac{1}{2}(1-p)(n+2)$ und $\nu = \frac{n-2}{2}$ (man vgl. S. 143). Für $\nu > 0 (n > 2)$ folgt dies sofort aus (43) und (42‴) bzw. (44) unter Beachtung der Definition (49) und aus den Voraussetzungen über die Koeffizienten a_{pq} und $h(x)$. Für $\nu = 0 (n = 2)$ folgt (53) analog mit (42′), (42″) und (43) bzw. (42‴) und (43), wenn man noch beachtet, daß für $0 \leqq u \leqq 1$ gilt

$$u \log \frac{1}{u} \leqq \frac{1}{e}. \tag{54}$$

Es gilt nun

6. 1. *Für $n \geqq 2$ und $m \geqq 2$ ist bei beliebiger Lage der Punkte x und y in T*

$$| K^{(m)}(x, y) | \leqq C Q^{m-1} r_{xy}^{1-n} \tag{55}$$

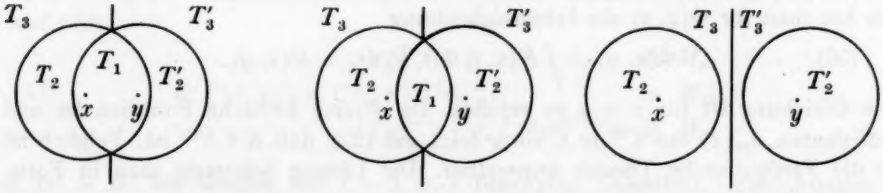
mit $Q = C C_1 | \varkappa |^{2q-p}$ und $C_1 = \operatorname{Max}\left(2C', \frac{2^{n-1}\omega_n}{k}\right)$; C' ist dabei eine noch anzugebende Konstante.

Beweis. Wir setzen abkürzend für festgehaltenes x, y und $\varkappa$ mit $| \varkappa | > \varkappa_1$: $S(x; | \varkappa |^{-p})$ sei die Hyperkugel um x mit Radius $| \varkappa |^{-p}$,

$$T_1 = S(x; | \varkappa |^{-p}) \frown S(y; | \varkappa |^{-p}),$$
$$T_2 = S(x; | \varkappa |^{-p}) - S(y; | \varkappa |^{-p}),$$
$$T_2' = S(y; | \varkappa |^{-p}) - S(x; | \varkappa |^{-p}),$$
$$t \in T_3 \leftrightarrow t \notin S(x; | \varkappa |^{-p}) \cup S(y; | \varkappa |^{-p}),\ r_{xt} \leqq r_{yt},\ r_{xt} \leqq R_0,$$
$$t \in T_3' \leftrightarrow t \notin S(x; | \varkappa |^{-p}) \cup S(y; | \varkappa |^{-p}),\ r_{xt} \geqq r_{yt},\ r_{yt} \leqq R_0.$$

(Die Zeichen $\frown$, $\cup$ bedeuten den Durchschnitt bzw. die Vereinigung.) Es ist jetzt $T < T_1 \cup T_2 \cup T_2' \cup T_3 \cup T_3'$. Wir schätzen nun $K^{(m)}(x, y)$ in der Weise ab, daß wir den Integranden majorisieren und dann T durch die angeführte Vereinigung der T_j und T_j' ersetzen. Die entstehenden Einzelintegrale über T_j und T_j' werden für sich abgeschätzt, wobei noch die folgenden drei Fälle bezüglich der Lage von x und y unterschieden werden müssen:

a) $r_{xy} \leqq | \varkappa |^{-p}$, b) $| \varkappa |^{-p} < r_{xy} \leqq 2 | \varkappa |^{-p}$, c) $\frac{2}{| \varkappa |^p} < r_{xy}$.



Wir beweisen nun (55) induktiv mit (53). Für $m = 2$ ist zunächst der Term

$$C^2 | \varkappa |^{2q} \int_{T_1} \frac{d\tau_t}{r_{xt}^{n-1} r_{ty}^{n-1}}$$

zu betrachten. Im Fall a) und b) ist das Integral gemäß 4. 1 durch $C' r_{xy}^{2-n}$ für $n > 2$ bzw. $C' \log \frac{2R_0}{r}$ für $n = 2$ zu ersetzen, wobei man bei b) vorher T_1 durch $T_2 \cup T_2'$ majorisiert hat. Bei c) tritt dies Integral nicht auf, da die Menge T_1 leer ist. Damit hat man für obigen Term die Majorante

$$C^2 | \varkappa |^{2q} C' r_{xy}^{2-n} \leqq C^2 C' | \varkappa |^{2q-p} 2 r_{xy}^{1-n} \leqq C Q r_{xy}^{1-n} \quad \text{für } n > 2,$$

bzw.

$$C^2 | \varkappa |^{2q} C' \log \frac{2R_0}{r_{xy}} \leqq C^2 C' | \varkappa |^{2q} e^{-1} \frac{2R_0}{r_{xy}} \leqq C Q r_{xy}^{-1} \quad \text{für } n = 2.$$

Bei der letzten Abschätzung wurde (54) und $R_0 \leqq \frac{2}{|\varkappa|^p}$ verwendet. Der nächste Term lautet

$$C^2 |\varkappa|^q \int\limits_{T_2} \frac{e^{-k|\varkappa| r_{ty}}}{r_{xt}^{n-1} r_{ty}^{n-1}} d\tau_t.$$

Der Bereich T_2 werde durch die Hyperkugel $S(x; |\varkappa|^{-p})$ ersetzt und es werden n-dimensionale Polarkoordinaten um x als Pol eingeführt. Im Fall a) und b) ist $r_{ty} \geqq |\varkappa|^{-p} \geqq \frac{r_{xy}}{2}$ und bei c) ist ebenso $r_{ty} \geqq \frac{r_{xy}}{2}$. Die Exponentialfunktion werde durch 1 ersetzt. Man bekommt als obere Schranke

$$C^2 |\varkappa|^q \left(\frac{2}{r_{xy}}\right)^{n-1} \omega_n \int\limits_0^{|\varkappa|^{-p}} d\varrho \leqq \frac{C^2 C_1}{r_{xy}^{n-1}} |\varkappa|^{q-p} \leqq C Q r_{xy}^{1-n} \quad \text{(es ist } k < 1).$$

Das entsprechende Integral über T_2' gibt dasselbe. Nun ist zu betrachten

$$C^2 \int\limits_{T_3} \frac{e^{-k|\varkappa| r_{xt}} \cdot e^{-k|\varkappa| r_{ty}}}{r_{xt}^{n-1} \cdot r_{ty}^{n-1}} d\tau_t.$$

Im Falle a) und b) werde $r_{ty} \geqq r_{tx} \geqq |\varkappa|^{-p} \geqq \frac{r_{xy}}{2}$ beachtet und der zweite e-Faktor durch 1 ersetzt; für c) ist $r_{ty} > \frac{r_{xy}}{2}$ zu benützen und ebenfalls der zweite e-Faktor durch 1 zu majorisieren. Einführung n-dimensionaler Polarkoordinaten um x gibt

$$C^2 \omega_n \int\limits_{|\varkappa|^{-p}}^{R_0} e^{-k|\varkappa|\varrho} d\varrho \frac{2^{n-1}}{r_{xy}^{n-1}} < \frac{2^{n-1} \omega_n C^2}{k|\varkappa|} r_{xy}^{1-n} \leqq C Q r_{xy}^{1-n}.$$

Der Term bezüglich T_3' liefert das gleiche.

Damit ist (55) für $m = 2$ bewiesen. Man erkennt, daß durch die entsprechenden Schlüsse die Gültigkeit der Formel (55) für $m + 1$ gezeigt werden kann, wenn man annimmt, daß (55) für m richtig ist. Damit ist dann unser Satz vollständig bewiesen.

Bemerkung. Die bei Abschätzung des Integrals über T_1 aufgetretene Konstante C' ist unabhängig von Form und Größe des Integrationsbereiches im Satz 4. 1 (man vgl. [7], S. 285).

Mit diesem Satz ist jetzt für die Reihe (51) der iterierten Kerne vom zweiten Reihenglied an die Majorante

$$C r_{xy}^{1-n} \sum_{m=2}^{\infty} Q^{m-1} \tag{56}$$

gefunden. Diese geometrische Reihe konvergiert mit der Summe $\frac{Q}{1-Q}$ für $Q < 1$. Wählt man nun die Zahl p $(0 < p < 1)$ so, daß $2q - p < 0$ ist, dann läßt sich eine Zahl $\varkappa_2 \geqq \varkappa_1$ angeben, so daß für alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_2$ dann $Q = C C_1 |\varkappa|^{2q-p} < 1$ ausfällt. Damit $2q - p < 0$ wird, braucht wegen $q = (1-p)(\nu + 2)$ nur die Ungleichung $1 > p > \frac{2\nu + 4}{2\nu + 5} = \frac{n+2}{n+3}$ erfüllt zu werden. Die Reihe der iterierten Kerne ist also in jedem Teilbereich von $T \times T$, für den $x \neq y$ ist, gleichmäßig konvergent, falls $|\varkappa| > \varkappa_2$ ist. Damit ist für $n \geqq 2$ die Funktion

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K^{(m)}(x, y) \tag{51}$$

stetig für $x \neq y$. Ferner ist Φ aus der Klasse $N^{(1)}$ (man vgl. S. 147). Somit haben wir das Resultat:

6. 2. *Die Fredholmsche Integralgleichung* (50) *besitzt für* $|\varkappa| > \varkappa_2$ *eine und nur eine Lösung* (51), *die aus* $N^{(1)}$ *ist.*

Wir behaupten nun weiter:

6. 3. *Die Lösung* $\Phi(x, y)$ *erfüllt bezüglich* x *in jedem Bereich* T', *für den* $x \neq y$ *ist, eine H-Bedingung zum Exponenten* μ *mit* $0 < \mu < 1$. *Damit sind dann alle Voraussetzungen, die bei Anwendung von* 4. 18 *auf den Ansatz* (47) *benutzt wurden, erfüllt. Die Funktion* $Q(x, y)$ *ist also Lösung von* (46) *für* $x \neq y$.

An der Definition (49) von $K(x, y)$ ist ersichtlich, daß $\frac{\partial}{\partial x_j} K(x, y)$ existiert und aus $N^{(0)}$ ist. Man braucht hierzu nur (38) und (20) zu beachten. Da $K \in N^{(1)}$ gilt, folgt aus 4. 4, daß $K \in N^{(1,\lambda)}$ mit $0 < \lambda \leqq 1$ ist. Die Integralgleichung (50) schreiben wir in der Gestalt

$$(57) \qquad \Phi(x, y) = K(x, y) + K_1(x, y) \text{ mit } K_1 = \int_T K(x, t)\, \Phi(t, y)\, d\tau_t.$$

Aus 4. 6 folgt nun $K_1 \in N^{(2,\mu)}$ mit $\mu \leqq \lambda$, $\mu < 1$. Es sei x', x'' und y aus T, sowie ϱ der kleinste Abstand der Strecke $x' \ldots x''$ von y. Ist T' ein Teilbereich von T, der wie T aus $A^{(1,\lambda)}$ ist und y nicht enthält, so gilt $\varrho \geqq \varrho_1 = \operatorname{Min}_{x \in T'} r_{xy} > 0$. Dann gilt für alle x', x'' aus T' wegen $2 - \mu - n < 0$

$$\frac{|K_1(x', y) - K_1(x'', y)|}{r^{\mu}_{x'x''}} \leqq \frac{|K_1(x', y) - K_1(x'', y)|}{r^{\mu}_{x'x''}\, \varrho^{2-\mu-n}} \cdot \varrho_1^{2-\mu-n}.$$

Der erste Faktor ist wegen $K_1 \in N^{(2,\mu)}$ beschränkt, also auch die ganze rechte Seite. Folglich erfüllt K_1 in T' eine H-Bedingung mit einem beliebigen Exponenten $\mu < 1$ bezüglich x. Da K in T' partiell differenzierbar ist, genügt auch Φ in T' der H-Bedingiung zum Exponenten $\mu < 1$ bezüglich x, q. e. d.

6. 4. *Die Funktion* $Q(x, y)$ *ist eine Levische Funktion.*

Das Integral in (47) ist wegen (36) und 4. 6 aus $N^{(3)}$, und somit gilt $Q \in N^{(2)}$. Ferner ist $Q - H = P - H + O(r^{3-n})$, und da P eine Levische Funktion darstellt (vgl. (21)), ist dies gleich $O(r^{3-n})$ für $n > 2$ bzw. $O(1)$ für $n = 2$. Nach 4. 10 ist

$$(58) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_j} + \int_T \frac{\partial P}{\partial x_j} \Phi d\tau.$$

Wiederum liefert 4. 6 und (36) für das Integral die Klasse $N^{(2)}$, und somit ist $Q_{x_j} \in N^{(1)}$. Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(Q - H) = \frac{\partial}{\partial x_j}(P - H) + O(r^{2-n}),$$

und die rechte Seite ist von der Ordnung $O(r^{2-n})$ für $n > 2$ bzw. $O\left(\log \frac{2R_0}{r}\right)$ für $n = 2$. Um noch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nach x_j, x_k von Q zu untersuchen, schreiben wir

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x_j} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x_j} + \int_T \frac{\partial (P(x, t) - H(x, t))}{\partial x_j} \Phi(t, y)\, d\tau_t + \int_T \frac{\partial H(x, t)}{\partial x_j} \Phi(t, y)\, d\tau_t.$$

Im ersten Integral ist der erste Faktor von der Ordnung $O(r^{2-n})$ für $n > 2$ bzw. $O\left(\log \frac{2R_0}{r}\right)$ für $u = 2$. Aus 4. 10 folgt dann, daß bei diesem Term bei Bildung der partiellen Ab-

leitung Differentiation und Integration vertauscht werden können. Mit 4. 27 ($\mu = 1$) erkennt man, daß 4. 13 ($\nu = 1$) auf das zweite Integral anwendbar ist. Damit folgt

$$(59)\qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} + \int\limits_T \frac{\partial^2 (P - H)}{\partial x_j \partial x_k} \Phi \, d\tau$$
$$+ \int\limits_T \left(\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x_j \partial x_k} \Phi(t,y) - \frac{\partial^2 H(t,x)}{\partial t_j \partial t_k} \Phi(x,y) \right) d\tau_t$$
$$+ \Phi(x,y) \int\limits_{\mathfrak{F}T} \frac{\partial H(x,t)}{\partial t_j} X_j(t) \, d\sigma_t .$$

Aus dieser Formel ist analog wie oben ersichtlich

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(Q - H) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(P - H) + O(r^{2-n}) + O(r^{1-n})$$

in $T' \subset T - \mathfrak{F}T$, sowie $Q_{x_j x_k} \in N^{(0)}$ in jedem Bereich $T' \subset T - \mathfrak{F}T$.

6. 5. *Die Funktion $Q(x, y)$ ist bezüglich y_j partiell differenzierbar und die Ableitungen $Q_{y_j}(x, y)$ sind nach x_k partiell differenzierbar in $T' \subset T - \mathfrak{F}T$. Die Ableitungen erfüllen in T' gleichmäßig die Relationen von* S. 141 *mit $L = Q$* (man vgl. [1], S. 51, 19. IV).

Beweis. Aus (57) folgt eine Integralgleichung für $K_1(x, y)$:

$$K_1(x,y) = \int\limits_T K(x,t) \, K_1(t,y) \, d\tau_t + K^{(2)}(x,y).$$

Da Φ den lösenden Kern von K darstellt, so ergibt sich hieraus

$$(60)\qquad K_1(x,y) = K^{(2)}(x,y) + \int\limits_T \Phi(x,t) \, K^{(2)}(t,y) \, d\tau_t .$$

Der iterierte Kern $K^{(2)}$ ist partiell nach y_j differenzierbar, und es ist $K^{(2)}_{y_j} \in N^{(1)}$ in $T' \subset T - \mathfrak{F}T$. Dies folgt aus Satz 4. 13, dessen Voraussetzungen man leicht mit 4. 27 und den Eigenschaften der Levischen Funktion P nachprüft. Man erkennt übrigens mit 4. 13 genauer, daß bei Bildung der Ableitung $\frac{\partial}{\partial y_j} K^{(2)}(x, y)$ nur $y \notin \mathfrak{F}T$ vorauszusetzen ist, x dagegen durchaus auf $\mathfrak{F}T$ liegen kann. Mit 4. 12 läßt sich also jetzt für $y \notin \mathfrak{F}T$ die Funktion K_{1y_j} bilden. Man hat folglich $K_{1y_j} \in N^{(1)}$. Damit ergibt sich aus (57), daß Φ_{y_j} für $y \notin \mathfrak{F}T$ existiert und aus $N^{(0)}$ in T' ist. Man stellt nun leicht fest, daß auch 4. 13 auf das Integral in dem Ausdruck (47) für $Q(x, y)$ angewendet werden kann. Es ergibt sich $Q_{y_j} \in N^{(1)}$ in T', und für $y \in T'$, $T' \subset T'' \subset T - \mathfrak{F}T$, $T'' \in A^{(1,\lambda)}$ wird

$$(61)\qquad \frac{\partial Q}{\partial y_j} = \frac{\partial P}{\partial y_j} + \int\limits_{T''} \left(P(x,t) \frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial y_j} - P(x,y) \frac{\partial \Phi(y,t)}{\partial t_j} \right) d\tau_t$$
$$+ \int\limits_{T - T''} P(x,t) \frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial y_j} \, d\tau_t + P(x,y) \int\limits_{\mathfrak{F}T''} \Phi(y,t) \, X_j(t) \, d\sigma_t .$$

Hier macht nun die Differentiation nach x_k bei beliebigem x aus T mit 4. 12 keine Schwierigkeiten, da $P \in N^{(2)}$ ist. Man findet schließlich für x, y aus T und y nicht auf $\mathfrak{F}T$ und $Q_{y_j x_k} \in N^{(0)}$ in T' die Existenz von $Q_{y_j x_k}$. Mit (38) folgt die Gültigkeit der Relationen von S. 141 für $L = Q$.

Analog wird eine Grundlösung Q^* für die Gleichung (46*) konstruiert. Man erkennt unmittelbar, daß Q^* entsprechende Eigenschaften wie Q besitzt.

Wir untersuchen jetzt die partiellen Ableitungen von $\Phi(x, y)$ nach x_j bzw. y_j. Oben wurde schon festgestellt, daß $\Phi_{y_j} \in N^{(0)}$ in $T' < T - \mathfrak{F}T$ ist, und daß (man vgl. (57) und (66))

$$\Phi(x, y) = K(x, y) + K^{(2)}(x, y) + \int_T \Phi(x, t)\, K^{(2)}(t, y)\, d\tau_t \tag{62}$$

gilt. Wir wollen nach y_j differenzieren. Wegen (43) bis (45) gilt

$$|DK(x, y)| \leqq C \begin{cases} r_{xy}^{-2\nu-2} & \qquad |\varkappa|^{1+q-p} r_{xy}^{-n} \quad \text{in } M_1, \\ |\varkappa|^{\nu+3} r_{xy}^{1-\nu} & \text{bzw.} \quad |\varkappa|^{1+q-p} r_{xy}^{-n} \quad \text{in } M_2, \\ |\varkappa|^{\nu+\frac{5}{2}} r_{xy}^{\frac{1}{2}-\nu} e^{-k'|\varkappa| r_{xy}} & \qquad |\varkappa|\, r_{xy}^{1-n} e^{-k|\varkappa| r_{xy}} \quad \text{in } M_3. \end{cases} \tag{63}$$

Zunächst ist die Ableitung von $K^{(2)}$ zu betrachten. Sie lautet nach 4. 13 und 4. 27 für $y \notin \mathfrak{F}T$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} K^{(2)}(x, y) = \int_T \left[K(x, t) \left(\frac{\partial K(t, y)}{\partial y_j} - \frac{\partial K(y, t)}{\partial t_j} \right) + \frac{\partial K(y, t)}{\partial t_j} (K(x, t) - K(x, y)) \right] d\tau_t + K(x, y) \int_{\mathfrak{F}T} K(y, t)\, X_j(t)\, d\sigma_t. \tag{64}$$

Wir beweisen jetzt den folgenden Satz:

6. 6. *Für alle x, y aus T', $T' < T - \mathfrak{F}T$, $T' \in A^{(1,\lambda)}$ und $|\varkappa| > \varkappa_3 \geqq \varkappa_2 > 1$ gilt*

$$|D\Phi(x, y)| \leqq C \begin{cases} r_{xy}^{-n} |\varkappa|^{1+q-p} & \text{in } M_1 \cup M_2, \\ r_{xy}^{1-n} (|\varkappa| e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{2q-p+1}) & \text{in } M_3. \end{cases}$$

Beweis. Zunächst werde $\varkappa$ so gewählt, daß $|\varkappa| > \varkappa_2$ und $\dfrac{2}{|\varkappa|^p} < \operatorname*{Min}_{t \in \mathfrak{F}T, y \in T'} r_{ty}$ ist. Dabei sei T' während der ganzen Betrachtung festgehalten. Dann gilt für das letzte Integral in (64) mit (53)

$$|K(x, y)| \cdot \left| \int_{\mathfrak{F}T} K X_j d\sigma \right| \leqq |K(x, y)|\, C \int_{\mathfrak{F}T} \frac{e^{-k|\varkappa| r_{yt}}}{r_{yt}^{n-1}}\, d\sigma_t \leqq O(1)\, |K(x, y)|. \tag{65}$$

Es werde nun das Integral

$$\int_T \frac{\partial}{\partial t_j} K(y, t)\, (K(x, t) - K(x, y))\, d\tau_t$$

von (64) betrachtet. Da $K_{t_j} \in N^{(0)}$ gilt, macht hier die Abschätzung mehr Mühe, und es kann nicht genau wie bei 6. 1 vorgegangen werden. Wie dort werden auch jetzt die Mengen T_j und T_j' benützt, sowie die Fälle a), b), c) unterschieden. Wir betrachten zunächst das Integral über T_1. Diese Menge zerlegen wir in zwei Mengen:

$$t \in \overline{T}_1 \leftrightarrow r_{yt} \geqq \tfrac{1}{2} r_{tx}, \quad t \in T_1,$$
$$t \in \overline{\overline{T}}_1 \leftrightarrow r_{yt} < \tfrac{1}{2} r_{tx}, \quad t \in T_1.$$

Die Punkte x und y werden wieder während der ganzen Überlegung festgehalten. Ebenso ist $\varkappa$ fest gewählt, wie oben angegeben. Dann gilt für $\overline{T}_1$ nach (63) und (53) mit beliebigem positivem $\nu < 1$ im Fall a):

$$C^2 \int_{\overline{T}_1} \frac{|\varkappa|^{1+q-p}}{r_{yt}^n} \left(\frac{|\varkappa|^q}{r_{tx}^{n-1}} + \frac{|\varkappa|^q}{r_{xy}^{n-1}} \right) d\tau_t \leqq C^2 \int_{\overline{T}_1} \frac{|\varkappa|^{2q-p+1}\, 2^\nu}{r_{yt}^{n-\nu} r_{tx}^\nu} \left(\frac{1}{r_{tx}^{n-1}} + \frac{1}{r_{xy}^{n-1}} \right) d\tau_t.$$

Dies wird mit 4. 1 unter Verwendung der für $0 \leqq u \leqq 1$, $0 < \alpha < 1$ gültigen Ungleichung $u^\alpha \cdot \log \frac{1}{u} \leqq \frac{1}{\alpha e}$ majorisiert durch

$$C^2 \left(\frac{|\varkappa|^{2q-p+1}}{r_{xy}^{n-1}} + \frac{|\varkappa|^{2q-p+1}}{r_{xy}^{n-1}} \log \frac{4}{|\varkappa|^p r_{xy}} \right) \leqq C^2 \frac{|\varkappa|^{2q-(1+a)p+1}}{r_{xy}^{n-1+a}}.$$

Im Fall b) bekommen wir für $\overline{T}_1$ entsprechend

$$C^2 \int\limits_{\overline{T}_1} \frac{|\varkappa|^{1+q-p}}{r_{yt}^n} \left(\frac{|\varkappa|^q}{r_{tx}^{n-1}} + \frac{e^{-k|\varkappa| r_{xy}}}{r_{xy}^{n-1}} \right) dt_t$$

$$\leqq C^2 2^\nu |\varkappa|^{2q-p+1} \int\limits_{T_2 \cup T_2'} \frac{d\tau_t}{r_{yt}^{n-\nu} r_{tx}^{n-(1-\nu)}} + C^2 \int\limits_{T_2 \cup T_2'} \frac{|\varkappa|^{1+q-p} 2^\nu}{r_{yt}^{n-\nu} r_{tx}^\nu} \cdot \frac{e^{-k|\varkappa| r_{xy}}}{r_{xy}^{n-1}} d\tau_t$$

$$\leqq C^2 2^\nu \frac{|\varkappa|^{q-p+1}}{r_{xy}^{n-1}} (|\varkappa|^q + e^{-k|\varkappa| r_{xy}} \log 8).$$

Für $\overline{\overline{T}}_1$ wird wegen (63) im Fall a) und b), wenn t^* einen Zwischenpunkt zwischen t und y darstellt,

$$C^2 \int\limits_{\overline{\overline{T}}_1} \frac{|\varkappa|^{2(1+q-p)}}{r_{yt}^{n-1}} \frac{d\tau_t}{r_{t^*x}^n}$$

eine Majorante. Nun ist

$$r_{xt^*} \geqq r_{xt} - r_{tt^*} \geqq r_{xt} - r_{ty} > \tfrac{1}{2} r_{tx}.$$

Damit erhalten wir weiter durch Vergrößerung ($\lambda < 1$)

$$C^2 |\varkappa|^{2(1+q-p)} 2^{n-\lambda} \int\limits_{\overline{\overline{T}}_1} \frac{d\tau_t}{r_{yt}^{n-(1-\lambda)} r_{tx}^{n-\lambda}} \leqq C' \frac{|\varkappa|^{2(1+q-p)}}{r_{xy}^{n-1}}.$$

Jetzt ist T_2 zu betrachten. Stets ist $r_{ty} \geqq \frac{r_{xy}}{2}$, $r_{ty} \geqq |\varkappa|^{-p}$, $r_{ty} \geqq r_{tx}$. Zunächst folgt aus (63) und (53) für a), b) und c) als Majorante

$$C^2 |\varkappa|^{q+1} \int\limits_{T_2} \frac{e^{-k|\varkappa| r_{xt}}}{r_{xt}^{n-1}} \left(\frac{1}{r_{ty}^{n-1}} + \frac{1}{r_{xy}^{n-1}} \right) d\tau_t.$$

Hieraus ergibt sich mit den genannten Ungleichungen, indem man T_2 durch $S(x; |\varkappa|^{-p})$ ersetzt und n-dimensionale Polarkoordinaten um x einführt, dann die obere Schranke $C |\varkappa|^q r_{xy}^{1-n}$.

In T_2' ist analog zu oben $r_{tx} \geqq \frac{1}{2} r_{xy}$, $r_{tx} \geqq |\varkappa|^{-p}$, $r_{tx} \geqq r_{ty}$. Auch T_2' werde in zwei Mengen zerlegt:

$$t \in \overline{T}_2' \leftrightarrow r_{yt} \geqq \tfrac{1}{2} r_{xt},\ t \in T_2' \qquad \text{und}$$

$$t \in \overline{\overline{T}}_2' \leftrightarrow r_{yt} < \tfrac{1}{2} r_{xt},\ t \in T_2'.$$

Für $\overline{T}_2'$ lautet im Fall a), b) und c) eine Majorante ($\nu < 1$)

$$C^2 |\varkappa|^{1+q-p} \int\limits_{\overline{T}_2'} \frac{1}{r_{ty}^n} \left(\frac{|\varkappa|^q}{r_{tx}^{n-1}} + \frac{|\varkappa|^q}{r_{xy}^{n-2}} \right) d\tau_t \leqq |\varkappa|^{1+2q-p} C^2 \int\limits_{\overline{T}_2'} \frac{2^\nu}{r_{ty}^{n-\nu} r_{tx}^\nu} \left(\frac{1}{r_{tx}^{n-1}} + \frac{1}{r_{xy}^{n-1}} \right) d\tau_t.$$

Hieraus bekommt man wie oben als obere Schranke

$$C^2 |\varkappa|^{1+2q-p} 2^\nu \left(\frac{1}{r_{xy}^{n-1}} + \frac{1}{r_{xy}^{n-1}} \log \frac{4}{|\varkappa|^p r_{xy}} \right),$$

d. h.

$$|\varkappa|^{1+2q-(1+a)p} r_{xy}^{1-n-a} \quad \text{für a) bzw.}$$

$$|\varkappa|^{1+2q-p} r_{xy}^{1-n} \quad \text{für b) und c).}$$

In $\overline{\overline{T}}_2'$ hat man in jedem Fall als Majorante

$$C^2 \int\limits_{\overline{\overline{T}}_2'} \frac{|\varkappa|^{1+q-p}}{r_{yt}^{n-1}} \cdot \frac{|\varkappa|^{1+q-p}}{r_{t^*x}^{n}} d\tau_t.$$

Wie oben ist $r_{xt^*} > \frac{1}{2} r_{xt}$ und durch dieselben Überlegungen folgt als obere Schranke $C^2 |\varkappa|^{2(1+q-p)} r_{xy}^{1-n}$.

Für T_3 gilt $r_{tx} \geqq r_{ty}$ und $\frac{1}{2} r_{xy} \leqq r_{ty}$. Damit erhält man im Fall a)

$$C^2 \int\limits_{T_3} \frac{|\varkappa| e^{-k|\varkappa| r_{yt}}}{r_{yt}^{n-1}} \left(\frac{e^{-k|\varkappa| r_{tx}}}{r_{tx}^{n-1}} + \frac{|\varkappa|^q}{r_{xy}^{n-1}} \right) d\tau_t \leqq C^2 \frac{|\varkappa|^q}{r_{xy}^{n-1}}$$

und im Fall b) und c)

$$C^2 \int\limits_{T_3} \frac{|\varkappa| e^{-k|\varkappa| r_{yt}}}{r_{yt}^{n-1}} \left(\frac{e^{-k|\varkappa| r_{tx}}}{r_{tx}^{n-1}} + \frac{e^{-k|\varkappa| r_{xy}}}{r_{xy}^{n-1}} \right) d\tau_t \leqq C^2 \frac{1}{r_{xy}^{n-1}}.$$

Dasselbe ergibt sich für T_3'.

Faßt man diese Teilresultate zusammen, so hat man für alle x, y aus T

$$(66) \quad \left| \int\limits_T \frac{\partial K(y,t)}{\partial t_j} (K(x,t) - K(x,y))\, d\tau_t \right| \leqq C \begin{cases} \dfrac{|\varkappa|^{2q-(2+\alpha)p+2}}{r_{xy}^{n-1+\alpha}} & \text{in } M_1 \cup M_2, \\ \dfrac{|\varkappa|^{2(1+q-p)}}{r_{xy}^{n-1}} & \text{in } M_3. \end{cases}$$

Die positive Zahl α kann kleiner als $\frac{1}{p} - 1$ angenommen werden. Es verbleibt noch die Abschätzung des ersten Integrals von (64)

$$\int\limits_T K(x,t) \left(\frac{\partial K(t,y)}{\partial y_j} - \frac{\partial K(y,t)}{\partial t_j} \right) d\tau_t.$$

Wir betrachten die runde Klammer. Sie lautet ausführlich nach Definition (48) von K:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} K(t,y) - \frac{\partial}{\partial t_j} K(y,t) = {} & \frac{\partial}{\partial y_j} \widetilde{\mathfrak{M}}_t[P(t,y) - H(t,y); y] + \frac{\partial h(y)}{\partial y_j} \varkappa^2 P(t,y) \\ & - \frac{\partial h(t)}{\partial t_j} \varkappa^2 P(y,t) - \frac{\partial}{\partial t_j} \widetilde{\mathfrak{M}}_y[P(y,t) - H(y,t); t] \\ & + (h(y) - h(t)) \varkappa^2 \frac{\partial P}{\partial y_j} - (h(t) - h(y)) \varkappa^2 \frac{\partial P}{\partial t_j} \\ & + \frac{\partial}{\partial y_j} \widetilde{\mathfrak{M}}_t[H(t,y); y] - \frac{\partial}{\partial t_j} \widetilde{\mathfrak{M}}_y[H(y,t); t]. \end{aligned}$$

Beachtet man die Definitionen (37) und (18) von P und H, so findet man für $r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-1}$ die Ungleichungen

$$(67) \qquad |D_x^j (P(x,y) - H(x,y))| \leqq \frac{C|\varkappa|}{r_{xy}^{n-3+j}} \qquad j = 0, 1, 2, 3,$$

indem man zeigt, daß P eine Levische Funktion darstellt (man vgl. S. 144). Damit folgt dann in M_1

$$|\widetilde{\mathfrak{M}}_x (P(x,y) - H(x,y); y)| \leqq \frac{C|\varkappa|}{r_{xy}^{n-2}} \text{ bzw. } \left| \frac{\partial}{\partial y_j} \widetilde{\mathfrak{M}}_x (P(x,y) - H(x,y); y) \right| \leqq \frac{C|\varkappa|}{r_{xy}^{n-1}}.$$

In M_2 und M_3 nehmen wir

$$|\widetilde{\mathfrak{M}}_x(P-H;\,y)| \leqq |\widetilde{\mathfrak{M}}_x(P;\,y)| + |\widetilde{\mathfrak{M}}_x(H;\,y)|;$$

mit (42''), (42''') und (43) folgt also

$$|\widetilde{\mathfrak{M}}_x(P(x,y)-H(x,y);\,y)| \leqq C r_{xy}^{1-n} \begin{cases} |\varkappa|^q & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ 1+e^{-k|\varkappa| r_{xy}} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Analog ergibt sich

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_j}\widetilde{\mathfrak{M}}_x(P(x,y)-H(x,y);\,y)\right| \leqq C r_{xy}^{1-n} \begin{cases} |\varkappa|^{1+q} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ 1+|\varkappa|\,e^{-k|\varkappa| r_{xy}} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Hieraus folgt dann mit (42), (43) und 4. 27

$$(68)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial y_j}K(t,y)-\frac{\partial}{\partial t_j}K(y,t)\right| \leqq C r_{xy}^{1-n} \begin{cases} 1 & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-1}, \\ |\varkappa|^{1+q} & |\varkappa|^{-1} < r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ 1+|\varkappa|\,e^{-k|\varkappa| r_{xy}} & |\varkappa|^{-p} < r_{xy}. \end{cases}$$

Man findet jetzt durch dieselben Überlegungen wie bei 6. 1 von S. 148 für alle x, y aus T

$$(69)\qquad \left|\int_T K(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}K(t,y)-\frac{\partial}{\partial t_j}K(y,t)\right)d\tau_t\right| \leqq C\,\frac{|\varkappa|^{1+2q-p}}{r_{xy}^{n-1}}.$$

Damit folgt dann aus (65) und (66)

$$(70)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial y_j}K^{(2)}(x,y)\right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} \dfrac{|\varkappa|^{2(1+q-p)-\alpha p}}{r_{xy}^{\alpha}} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ e^{-k|\varkappa| r_{xy}}+|\varkappa|^{2(1+q-p)} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Die linksstehende partielle Ableitung ist für y auf $\mathfrak{F}T$ nicht definiert, wie man an (64) erkennt. Also gilt (70) wegen (65) sicher für alle $x \in T$ und y aus $T' \subset T - \mathfrak{F}T$.

Wir gehen jetzt dazu über, die Ableitungen $\dfrac{\partial}{\partial y_j}\Phi(x,y)$ abzuschätzen. Zunächst ist wegen der Majorante (56) für $\Phi(x,y)$ mit (53) für $|\varkappa| > \varkappa_2$, $n \geqq 2$ und alle x, y aus T

$$(71)\qquad |\Phi(x,y)| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^q & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ e^{-k|\varkappa| r_{xy}}+|\varkappa|^{2q-p} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich jetzt in bekannter Weise mit (70) für alle $x \in T$ und $y \in T'$:

$$(72)\qquad \left|\int_T \Phi(x,t)\,\frac{\partial K^{(2)}(t,y)}{\partial y_j}\,d\tau_t\right| \leqq C\,\frac{|\varkappa|^{2-3p+4q}}{r_{xy}^{n-1}}.$$

Jetzt folgt endlich die Behauptung von 6. 6 für Φ_{y_j} mit (62) aus (63), (70), (72). Hierbei ist noch zu beachten, daß $1-2p+q<0$ ist, was sofort aus den Voraussetzungen über p folgt (man siehe S. 149). Der Betrag von $\varkappa$ war für (65) größer als $\varkappa_2$ gewählt worden. Es gibt also bei gegebenem T' eine Zahl $\varkappa_3 \geqq \varkappa_2$, so daß für alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_3$ die Behauptung richtig ist.

Betrachtet man schließlich die (64) entsprechende Relation für $K_{x_j}^{(2)}$, so erkennt man, daß auch diese partiellen Ableitungen die Ungleichungen (70) erfüllen. Nur muß dann $x \in T'$ und $y \in T$ sein. Aus der Beziehung

$$\Phi(x,y) = K(x,y) + K^{(2)}(x,y) + \int_T K^{(2)}(x,t)\,\Phi(t,y)\,d\tau_t,$$

die sich aus der Integralgleichung (50) durch linksseitige Multiplikation mit K und Integration ergibt, erhält man dann die Behauptung unseres Satzes für Φ_{x_j}, q. e. d.

§ 7. Die $\varkappa$-Abhängigkeit von $Q(x, y)$.

Wir untersuchen jetzt die $\varkappa$-Abhängigkeit der Funktion Q und ihrer Ableitungen.

Um das Integral in (47) abzuschätzen, benutzen wir die aus (42) folgenden Ungleichungen

$$(73) \qquad |P(x, y)| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-2} & n \geqq 2, \ r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{-1} e^{-k|\varkappa| r_{xy}} & n \geqq 2, \ r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Dabei ist $p + q - 1 = (\nu + 1)(1 - p)$. Dann ergibt sich mit (71) und 4. 1 in der üblichen Weise für $n \geqq 2$ und $|\varkappa| > \varkappa_2$ für alle x, y aus T

$$\left| \int_T P(x, t)\, \Phi(t, y)\, d\tau_t \right| \leqq \frac{C\, |\varkappa|^{p+2q-2}}{r_{xy}^{n-2}} \quad \text{oder} \quad \frac{C\, |\varkappa|^{2q-2}}{r_{xy}^{n-1}}.$$

Damit wird wegen (47) und (42) für $n > 2$ bzw. $n = 2$

$$(74) \quad |Q(x, y)| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-2}} \begin{cases} 1 & C \log \dfrac{1}{|\varkappa|\, r_{xy}} + O(1) \ \text{in } M_1, \\ |\varkappa|^{2p+q-2} & \text{bzw. } O(1) \quad \text{in } M_2, \\ e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{p+2q-2} & C \dfrac{e^{-k|\varkappa| r_{xy}}}{\sqrt{|\varkappa|\, r_{xy}}} + O(1) \quad \text{in } M_3 \end{cases}$$

oder für $n \geqq 2$

$$(74) \qquad |Q(x, y)| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-2} & \text{in } M_1 \cup M_2, \\ |\varkappa|^{-1} e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{2q-2} & \text{in } M_3. \end{cases}$$

Entsprechend folgt für $n \geqq 2$, $|\varkappa| > \varkappa_2$ und alle x, y aus T mit (43)

$$(75) \qquad \left| \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x_j} \right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} 1 & \text{in } M_1, \\ |\varkappa|^{p+q-1} & \text{in } M_2, \ (n \geqq 2). \\ e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{2q-1} & \text{in } M_3, \end{cases}$$

Es sind noch partielle Ableitungen zweiter Ordnung von Q zu betrachten. In der Darstellung (59) tritt in dem ersten Integral $(P - H)_{x_k x_j}$ auf. Hierfür benützen wir (67) in M_1. Wegen

$$|D_x^2(P - H)| \leqq |D_x^2(P)| + |D_x^2(H)|$$

bekommt man aus (43) Abschätzungen in M_2 und M_3. Damit erhält man dann in bekannter Weise

$$\left| \int_T \frac{\partial^2 (P(x, t) - H(x, t))}{\partial x_j \partial x_k} \Phi(t, y)\, d\tau_t \right| \leqq C \frac{|\varkappa|^{2q}}{r_{xy}^{n-1}}.$$

Analog folgt

$$\left| \int_T \left(\frac{\partial^2 H(x, t)}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 H(t, x)}{\partial t_j \partial t_k} \right) \Phi(t, y)\, d\tau_t \right| \leqq \frac{C\, |\varkappa|^{2q-p}}{r_{xy}^{n-1}}.$$

Schließlich bekommt man mit 6. 6 für alle x, y aus T durch dieselben Überlegungen wie bei dem genannten Satz ($|\varkappa| > \varkappa_3$)

$$\left| \int_T \frac{\partial^2 H(t, x)}{\partial t_j \partial t_k} (\Phi(t, y) - \Phi(x, y))\, d\tau_t \right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} \dfrac{|\varkappa|^{q+1-p(\alpha+1)}}{r_{xy}^{\alpha}} & \text{in } M_1 \cup M_2, \\ |\varkappa|^{1+q-p} & \text{in } M_3. \end{cases}$$

Damit folgt dann aus (59) das Resultat:

Für jedes $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_3$ und alle x, y aus $T' < T - \mathfrak{F}T$ gilt

$$(76)\quad \left|\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x_j \partial x_k}\right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} r_{xy}^{-1} \\ |\varkappa|^{p+q} \\ |\varkappa|\, e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{2q} \end{cases} \text{bzw.} \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^q r_{xy}^{-1} & \text{in } M_1, \\ |\varkappa|^q r_{xy}^{-1} & \text{in } M_2, \\ |\varkappa|\, e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{2q} & \text{in } M_3. \end{cases}$$

Wir betrachten „gemischte" partielle Ableitungen von Q. Nach (61) und Satz 4. 12 ist für $x \in T$, $y \in T'$, $T' < T'' - \mathfrak{F}T''$ und $T'' < T - \mathfrak{F}T$, $T'' \in A^{(1,\lambda)}$:

$$(77)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x_j \partial y_k} &= \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x_j \partial y_k} + \int\limits_{T''} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial y_k} - \frac{\partial \Phi(y,t)}{\partial t_k}\right) d\tau_t \\ &\quad + \int\limits_{T-T''} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial y_j}\, d\tau_t \\ &\quad + \int\limits_{T''} \frac{\partial \Phi(y,t)}{\partial t_k}\left(\frac{\partial P(x,t)}{\partial x_j} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial x_j}\right) d\tau_t \\ &\quad + \frac{\partial P(x,y)}{\partial x_j} \int\limits_{\mathfrak{F}T''} \Phi(y,t)\, X_k(t)\, d\sigma_t. \end{aligned}$$

Die runde Klammer im ersten Integral ist nach (62)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial y_k} - \frac{\partial \Phi(y,t)}{\partial t_k} &= \frac{\partial K(t,y)}{\partial y_k} - \frac{\partial K(y,t)}{\partial t_k} + \frac{\partial K^{(2)}(t,y)}{\partial y_k} - \frac{\partial K^{(2)}(y,t)}{\partial t_k} \\ &\quad + \int\limits_T \Phi(t,z) \frac{\partial}{\partial y_k} K^{(2)}(z,y)\, d\tau_z - \int\limits_T \Phi(y,z) \frac{\partial K^{(2)}(z,t)}{\partial t_k}\, d\tau_z, \end{aligned}$$

und für diesen Ausdruck finden wir mit (68), (70), (72)

$$\left|\frac{\partial \Phi(t,y)}{\delta y_k} - \frac{\partial \Phi(y,t)}{\delta t_k}\right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} \dfrac{|\varkappa|^{1+q-p\alpha}}{r_{xy}^{\alpha}} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|\, e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{2(1-p+q)} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

(Es ist $1 + q - 2p < 0$.) Damit ergibt sich für das erste Integral in (77) in der üblichen Weise für $x \in T$, $y \in T'$

$$\left|\int\limits_{T''} \frac{\partial P(x,t)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial y_k} - \frac{\partial \Phi(y,t)}{\partial t_k}\right) d\tau_t\right| \leqq C \frac{|\varkappa|^{2q}}{r_{xy}^{n-1}}.$$

Das dritte Integral wird analog wie im Satz 6. 6 abgeschätzt. Man erhält für alle $x \in T$, $y \in T'$

$$\left|\int\limits_{T''} \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t_k}\left(\frac{\partial P(x,t)}{\partial x_j} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial x_j}\right) d\tau_t\right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^{3q+1-(\alpha+1)p}\, r_{xy}^{-\alpha} & \text{in } M_1 \cup M_2, \\ |\varkappa|^{2q+1-p} & \text{in } M_3. \end{cases}$$

Nun werde $\varkappa$ so gewählt, daß $|\varkappa| > \varkappa_3$ und $\dfrac{2}{|\varkappa|^p} < \operatorname{Min} r_{ts}$ für $t \in T'$, $s \in T - T'' + \mathfrak{F}T''$ ist. Dann erkennt man sofort, daß das Integral über $T - T''$ in (77) für x, y aus T' bezüglich $\varkappa$ beschränkt bleibt. Schließlich wird das Integral über $\mathfrak{F}T''$ für $x \in T$, $y \in T'$ majorisiert durch

$$C\left|\frac{\partial P(x,y)}{\partial x_j}\right| \cdot \int\limits_{\mathfrak{F}T''} \frac{e^{-k|\varkappa| r_{yt}} + |\varkappa|^{2q-p}}{r_{yt}^{n-1}}\, d\sigma_t = \left|\frac{\partial P(x,y)}{\partial x_j}\right| \cdot O(1).$$

Die bei unseren Betrachtungen fest gewählte, aber sonst beliebige positive Zahl $p < 1$ war für die Konvergenz der Reihe (56) größer als $\dfrac{n+2}{n+3}$ angenommen worden (man vgl. S. 149).

Wir wollen ab jetzt annehmen, daß sogar $\frac{n+3}{n+4} < p < 1$ ist. Dann wird $3q - 2p + 1 < q$, wie man nachrechnet, wenn man sich erinnert, daß $q = \frac{1}{2}(1-p)(n+2)$ gesetzt wurde. Indem wir jetzt obige Teilergebnisse zusammenfassen, haben wir das folgende Resultat:

Für alle x, y aus T' und alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_4 \geqq \varkappa_3$ gilt

$$(78) \qquad \left|\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x_j \partial y_k}\right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^q r_{xy}^{-1}, \\ |\varkappa|^{p+q}, \\ |\varkappa| e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{1-p+2q} \end{cases}$$

$$\text{bzw. } \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa| r_{xy}^{-1} & \text{in } M_1, \\ |\varkappa| r_{xy}^{-1} & \text{in } M_2, \\ |\varkappa| e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{1-p+2q} & \text{in } M_3. \end{cases}$$

Beachtet man die Darstellung (61) für $Q_{y_j}(x, y)$, so findet man durch analoge Abschätzungen wie eben das folgende Resultat: Für alle x, y aus T' und alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_5 \geqq \varkappa_4$ gilt

$$(75') \qquad \left|\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x_j}\right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-1} & \text{in } M_1 \cup M_2, \\ e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{2q-p} & \text{in } M_3, \end{cases}$$

also ein den Ungleichungen (75) entsprechendes Ergebnis.

Wörtlich dieselben Abschätzungen erhält man für $Q^*(x, y)$ und die entsprechenden Ableitungen von $Q^*(x, y)$.

§ 8. Das Verhalten der Lösungen einer allgemeinen elliptischen Differentialgleichung für $|\varkappa| \to \infty$.

Mit Hilfe der gewonnenen Grundlösungen untersuchen wir jetzt die Lösungen einer elliptischen partiellen Differentialgleichung, deren Koeffizienten in gewisser Weise von dem Parameter $\varkappa$ abhängen können. Gegeben sei die inhomogene lineare Gleichung

$$(79) \qquad \mathfrak{M}_x(u) + \sum_{j=1}^{n} B_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + (A - \varkappa^2 h)\, u = D.$$

Die Koeffizienten von $\mathfrak{M}_x$ erfüllen die Voraussetzungen von früher (§ 2) in einem beschränkten Gebiet C des R_n. Ferner seien in C die Funktionen $A(x; \varkappa)$, $D(x; \varkappa)$ aus $C^{(0,\mu)}$ und $B_j(x; \varkappa)$ aus $C^{(1,\mu)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ mit $0 < \mu < 1$. Es sei T ein Bereich aus C der Klasse $A^{(1,\lambda)}$ mit $0 < \lambda \leqq 1$ und dort gelte gleichmäßig

$$(80) \qquad A = O(|\varkappa|^{\alpha}),\ B = O(|\varkappa|^{\beta}),\ B_{x_j} = O(|\varkappa|^{\beta'}),\ D = O(|\varkappa|^{\gamma})$$

mit $\alpha, \beta', \gamma < 2$, $\beta < 1$.

Wir betrachten Lösungen $u = u(x; \varkappa)$ von (79), die folgende Eigenschaften haben:

$$(81) \qquad u, u_{x_j} \in C^{(0)} \text{ in } T,\ u_{x_j x_k} \in C^{(0)} \text{ in } T - \mathfrak{F}T,$$

und bringen sie in Zusammenhang mit Lösungen $v = v(x; \varkappa)$ von

$$(82) \qquad (\mathfrak{M}_x - \varkappa^2 h(x))\, v = 0$$

mit entsprechenden Eigenschaften (81).

Der jetzt zugrunde liegende Bereich T wurde so gewählt, daß die im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Ungleichungen (75), (75'), (76) und (78) in T angewendet werden können. D. h. es liege unser Bereich T in dem dort mit T' bezeichneten Bereich. Aus Bequemlichkeit wurde wieder der Buchstabe T zur Bezeichnung des Bereiches verwandt.

Wir führen die Differentialgleichung in eine Integralgleichung über [6] und beweisen zunächst den folgenden Satz:

8. 1. *Jede Lösung u von* (79) *mit den Eigenschaften* (81) *genügt der Integralgleichung*

$$u(x) - \int_T K(x, y; \varkappa)\, u(y)\, d\tau_y = w_1(x) + w(x) \tag{83}$$

mit dem Kern

$$K(x, y; \varkappa) = Q^*(y, x)\left(A(y) - \sum_j \frac{\partial B_j}{\partial y_j}\right) - \sum_j B_j \frac{\partial Q^*(y, x)}{\partial y_j} \tag{84}$$

und

$$w_1(x) = -\int_T Q^*(y, x)\, D(y)\, d\tau_y. \tag{85}$$

Für die Funktion w, die unten definiert wird, gilt $w \in C^{(0,\nu)}$ in T, $D_1 w$, $D_2 w \in C^{(0)}$ in $T - \mathfrak{F}T$ $(0 < \nu < 1)$.

Beweis. Es sei also u eine Lösung von (79) mit den Eigenschaften (81) und T' ein Bereich aus $T - \mathfrak{F}T$ der Klasse $A^{(1,\lambda)}$. Dann werde Formel (25) auf $u = u(y)$, $L(y, x) = Q^*(y, x)$ in T' angewendet. Es ergibt sich für $x \in T' - \mathfrak{F}T'$:

$$u(x) = \int_{T'} \{u(y)\, \mathfrak{M}_y^*(Q^*(y, x)) - Q^*(y, x)\, \mathfrak{M}_y(u(y))\}\, d\tau_y + \overline{w}_2(x)$$

mit

$$\overline{w}_2(x) = \int_{\mathfrak{F}T'} \{Q^*(y, x)\, \mathfrak{P}_y(u(y)) - u(y)\, \mathfrak{Q}_y(Q^*(y, x))\}\, d\sigma_y.$$

Hieraus folgt weiter mit (79)

$$u(x) = \int_{T'} Q^*(y, x)\left[\sum_j B_j(y) \frac{\partial u}{\partial y_j} + A(y)\, u(y)\right] d\tau_y - \int_{T'} Q^*(y, x)\, D(y)\, d\tau_y + \overline{w}_2(x).$$

In dieser Beziehung kommen die zweiten Ableitungen von u nicht mehr vor. Da u selbst und die Ableitungen erster Ordnung von u in T stetig sind, kann durch einen stetigen Grenzübergang $\mathfrak{F}T'$ in $\mathfrak{F}T$, d. h. T' in T übergeführt werden. Dann haben wir für $x \in T' - \mathfrak{F}T'$

$$u(x) = \int_T \left\{Q^*(y, x)\left[A(y) - \sum_j \frac{\partial B_j}{\partial y_j}\right] u(y) - \sum_j B_j(y) \frac{\partial Q^*(y, x)}{\partial y_j}\, u(y) + \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j}(u Q^* B_j)\right\} d\tau_y + w_1(x) + w_2(x),$$

wobei $w_2(x) = \lim\limits_{\mathfrak{F}T' \to \mathfrak{F}T} \overline{w}_2(x)$ bedeutet. Mit dem Gaußschen Satz folgt weiter

$$u(x) = \int_T K(x, y; \varkappa)\, u(y)\, d\tau_y + w_1 + w_2 + w_3 \tag{86}$$

mit

$$w_3(x) = \sum_j \int_{\mathfrak{F}T} u(y)\, B_j(y)\, Q^*(y, x)\, X_j(y)\, d\sigma_y.$$

Die letzte Relation ist unter der Voraussetzung $x \in T' - \mathfrak{F}T'$ hergeleitet worden. Sie gilt aber für beliebige $x \in T - \mathfrak{F}T$, denn es braucht bei gegebenem x die Menge T' nur so gewählt zu werden, daß $x \in T' - \mathfrak{F}T'$ ist. Durch den Grenzübergang $\mathfrak{F}T' \to \mathfrak{F}T$ bekommt man wieder (86).

Da $Q^* \in N^{(2)}$ und $Q^*_{y_j} \in N^{(1)}$ ist, folgt auch $K \in N^{(1)}$ in T. Ferner ist sogar $K \in N^{(1,\nu)}$ mit beliebigem ν aus $0 < \nu < 1$, denn $Q^*_{y_j}$ hat diese Eigenschaft nach 4. 4. Folglich ist nach 4. 9 das Integral über T in (86) und w_1 aus $C^{(0,\nu)}$ in T.

Da $Q^* \in N^{(\alpha,\nu)}$ mit $1 < \alpha < 2$ und $\nu \leqq 1$ ist, liefert 4. 9 dann $w_3 \in C^{(0,\nu)}$ in T mit beliebigem $\nu < \alpha - 1 < 1$. Nach Voraussetzung ist $u \in C^{(1)}$ in T, also ist auch

$$\bar{\bar{w}}_2(x) = u(x) - \int_T K(x, y; \varkappa)\, u(y)\, d\tau_y - w_1(x) - w_3(x)$$

aus $C^{(0,\nu)}$ in T mit $0 < \nu < 1$. In dieser Relation kann man also den Grenzübergang x gegen ξ, wobei $\xi \in \mathfrak{F}T$ ist, ausführen. Da aber $w_2(x) = \bar{\bar{w}}_2(x)$ für $x \in T - \mathfrak{F}T$ ist, können die gefundenen Randwerte von $\bar{\bar{w}}_2(x)$ für $x \in \mathfrak{F}T$ als Fortsetzung von $w_2(x)$ bis in den Rand $\mathfrak{F}T$ angesehen werden. Dann ist also $w_2 \in C^{(0,\nu)}$ in T. Die Funktionen w_2, w_3, also auch $w = w_2 + w_3$ sind in $T - \mathfrak{F}T$ aus $C^{(2)}$.

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen nun die Umkehrung dieses Satzes zeigen. Dazu müssen wir voraussetzen, daß die in den vorangegangenen Überlegungen konstruierten Grundlösungen $Q(x, y)$ und $Q^*(x, y)$ der Relation

$$Q(x, y) = Q^*(y, x) \text{ für alle } x, y \text{ aus } T$$

genügen. Damit wird dann $Q(x, y)$ bezüglich y Lösung der zu (82) adjungierten Gleichung, und $Q^*(x, y)$ erfüllt bezüglich y die Gleichung (82), jeweils für $x \neq y$. Nimmt man bei unseren Überlegungen an Stelle der Grundlösungen Q bzw. Q^* Greensche Funktionen, so ist obige Relation erfüllt (man vgl. § 9[1]).

Bemerkung. Für Grundlösungen, die der genannten Beziehung genügen, wird dann die in der Behauptung von Satz 8. 1 auftretende Funktion $w(x)$ eine Lösung von (82) in $T - \mathfrak{F}T$, wie man an der Definition der $w_j (j = 2, 3)$ unmittelbar erkennt.

8. 2. *Jede Lösung der Integralgleichung*

$$u(x) - \int_T K(x, y; \varkappa)\, u(y)\, d\tau_y = w_1(x) + w(x) \tag{83}$$

aus $L^{(\infty)}$ in T, wobei w_1 die Bedeutung (85) *hat, der Kern K durch* (84) *gegeben ist und w eine beliebige Lösung von* (82) *darstellt, für die $w \in C^{(0,\nu)}$ in T; $D_1 w$, $D_2 w \in C^{(0)}$ in $T - \mathfrak{F}T$ gilt, ist eine Lösung der Differentialgleichung* (79) *mit $u \in C^{(0,\nu)}$ in T, $D_1 u \in C^{(0,\nu)}$ in $T - \mathfrak{F}T$, $D_2 u \in C^{(0)}$ in $T - \mathfrak{F}T$, $0 < \nu < 1$.*

Beweis. Es sei also $u \in L^{(\infty)}$ in T und u Lösung von (83). Wir setzen abkürzend

$$v(x) = \int_T Q^*(y, x) \left[A(y) - \sum_j \frac{\partial B_j(y)}{\partial y_j}\right] u(y)\, d\tau_y$$

und

$$\bar{v}(x) = \sum_j v_j(x) = -\sum_j \int_T \frac{\partial Q^*(y, x)}{\partial y_j} B_j(y)\, u(y)\, d\tau_y.$$

Dann lautet die Integralgleichung (83)

$$u(x) = v(x) + \bar{v}(x) + w_1(x) + w(x). \tag{87}$$

Da $Q^* \in N^{(1,\nu)}$ und $Q^*_{y_j} \in N^{(1,\nu)}$ mit $0 < \nu < 1$ ist, folgt mit 4. 9 dann $v, \bar{v}, u_1 \in C^{(0,\nu)}$ in T. Mit der Voraussetzung $w \in C^{(0,\nu)}$ in T gibt das $u \in C^{(0,\nu)}$ in T nach (87). Darüber hinaus ist nach 4. 10 und 4. 9 sogar v und w_1 aus $C^{(1,\nu)}$ in T. Nun werde v_j betrachtet. Zunächst ist

$$v_j(x) = -\int_T \frac{\partial(Q^*(y, x) - H(y, x))}{\partial y_j} B_j(y)\, u(y)\, d\tau_y - \int_T \frac{\partial H(y, x)}{\partial y_j} B_j(y)\, u(y)\, d\tau_y. \tag{88}$$

[1]) Über allgemeinere Grundlösungen, die obiger Relation genügen, soll in einer späteren Arbeit berichtet werden.

Da $\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_j}(Q^*(y,x)-H(y,x))$ aus $N^{(1)}$ ist (Satz 6. 5, S. 151), ist nach 4. 10 das erste Integral aus $C^{(1)}$ in T. Auf das zweite Integral in (88) lassen sich die Schlüsse von 4. 13 anwenden, wenn man 4. 27 beachtet. Man findet in bekannter Weise ([1], S. 24), daß das Integral aus $C^{(1,\nu)}$ in $T-\mathfrak{F}T$ mit $\nu<1$ ist. Also ist v_j aus $C^{(1)}$ in $T-\mathfrak{F}T$ und folglich auch $\bar{v}$. Damit wird dann schließlich wegen (87) $u\in C^{(1)}$ in $T-\mathfrak{F}T$, da nach Voraussetzung $w\in C^{(2)}$ in $T-\mathfrak{F}T$ ist. Ist $T'\subset T''-\mathfrak{F}T''$ und $T''\subset T-\mathfrak{F}T$, $T''\in A^{(1,\lambda)}$, so läßt sich die Ableitung nach x_k des ersten Integrals in (88) für $x\in T'$ umformen in

$$\int\limits_{T-T''}\frac{\partial}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}(Q^*-H)\,B_j u\,d\tau-\int\limits_{T''}\frac{\partial}{\partial x_k}(Q^*-H)\,\frac{\partial(B_j u)}{\partial y_j}\,d\tau$$
$$+\int\limits_{\mathfrak{F}T''}\frac{\partial}{\partial x_k}(Q^*-H)\,B_j u X_j\,d\sigma.$$

Man erkennt leicht, daß dies eine Funktion in x aus $C^{(0,\nu)}$ mit $0<\nu\leqq 1$ in T' darstellt. Dies ist für das erste und dritte Integral unmittelbar zu sehen, für das zweite folgt es aus 4. 9, da $(Q-H)_{x_k}\in N^{(2,\lambda)}$ mit $\lambda\leqq 1$ nach 4. 4 gilt. Folglich ist wegen (88) dann v_j also auch $\bar{v}$ aus $C^{(1,\nu)}$ in $T-\mathfrak{F}T$ mit $0<\nu<1$. Somit wird schließlich $u\in C^{(1,\nu)}$ in $T-\mathfrak{F}T$ wegen (87).

Ist jetzt T' wie üblich ein Bereich der Klasse $A^{(1,\nu)}(\lambda\leqq 1)$, der in $T-\mathfrak{F}T$ liegt, so haben wir mit dem Gaußschen Satz nach (83) für $x\in T'-\mathfrak{F}T'$

$$\begin{aligned}u(x)=&\int\limits_{T'}Q^*(y,x)\left[A(y)\,u(y)+\sum_j B_j(y)\frac{\partial u}{\partial y_j}\right]d\tau_y\\ &+\int\limits_{T-T'}\left\{Q^*(y,x)\left[A(y)-\sum_j\frac{\partial B_j}{\partial y_j}\right]-\sum_j B_j(y)\frac{\partial Q^*(y,x)}{\partial y_j}\right\}u(y)\,d\tau_y\\ &-\int\limits_{\mathfrak{F}T'}\sum_j B_j(y)\,Q^*(y,x)\,u(y)\,X_j(y)\,d\sigma_y+w_1(x)+w(x).\end{aligned}\tag{89}$$

Auf Grund der obigen Überlegungen und unserer Voraussetzungen ist die Klammer in dem ersten Integral aus $C^{(1,\nu)}$ in T'. Damit folgt dann aus 4. 15 und 4. 17 für $x\in T'-\mathfrak{F}T'$ wegen $Q(x,y)=Q^*(y,x)$

$$(\mathfrak{M}_x-\varkappa^2h(x))\,u(x)=-A(x)\,u(x)-\sum_j B_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+D(x).$$

Das ist aber die Differentialgleichung (79). Außerdem ist $u\in C^{(2)}$ in $T'-\mathfrak{F}T'$. Es gelten diese beiden letzten Aussagen aber für alle $x\in T-\mathfrak{F}T$, da sich bei gegebenem x stets $T'\subset T-\mathfrak{F}T$ so wählen läßt, daß $x\in T'$ ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

Vergleicht man diese beiden voranstehenden Sätze, so erkennt man, daß die Klasse der Funktionen aus $L^{(\infty)}$, die Lösung der Integralgleichung (83) sind, umfassender ist, als die Klasse der Lösungen der Differentialgleichung (79) mit den Eigenschaften (81). Beschränkt man sich jedoch unter der zusätzlichen Annahme $Q(x,y)=Q^*(y,x)$ auf diejenigen Lösungen von (83) die aus $C^{(1)}$ in T sind, so sind (83) und (79) äquivalent.

Die Integralgleichung ist vom Fredholmschen Typus, da der Kern aus $N^{(1)}$ oder genauer aus $N^{(1,\nu)}$ mit $0<\nu<1$ ist, wie wir festgestellt haben. Wir betrachten zunächst die homogene Gleichung

$$u(x)-\int\limits_T K(x,y;\varkappa)\,u(y)\,d\tau_y=0.\tag{90}$$

8. 3. *Die homogene Integralgleichung* (90) *hat für* $\varkappa$ *mit* $|\varkappa| > \varkappa^*$ *nur die triviale Lösung.*

Beweis. Angenommen, die Gleichung (90) habe eine nichttriviale Lösung $u = u(x; \varkappa)$. Dann ist $|u(x; \varkappa)| \leqq U(\varkappa)$ für alle $x \in T$; d. h. $U(\varkappa)$ ist das positive von $\varkappa$ abhängige Maximum von $|u|$. Aus (90) würde dann folgen

$$|u(x)| \leqq U(\varkappa) \int_T |K(x, y; \varkappa)| \, d\tau_y. \tag{91}$$

Es sei $\alpha' = \operatorname{Max}(\alpha, \beta')$, dann ist wegen (80) $\alpha' < 2$. Das Integral über T wird bei festgehaltenem x zerlegt in zwei Integrale über $S(x; |\varkappa|^{-p})$ und $T - S(x; |\varkappa|^{-p})$. Das erste Integral gibt mit (74) und (75) die Majorante

$$C \int_{S(x;|\varkappa|^{-p})} (|\varkappa|^{p+q-2+\alpha'} + |\varkappa|^{p+q-1+\beta}) \, r_{xy}^{1-n} d\tau_y = O(|\varkappa|^{q-1+\varepsilon}),$$

wobei $\varepsilon = \operatorname{Max}(\alpha' - 1, \beta, \gamma - 1)$ bedeutet. Es ist nach Voraussetzung $\varepsilon < 1$. Für das zweite Integral erhält man als obere Schranke

$$C \int_{T - S(x;|\varkappa|^{-p})} \{(|\varkappa|^{-1} e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{2q-2}) \, |\varkappa|^{\alpha'} + (e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{2q-1}) \, |\varkappa|^{\beta}\} \, r_{xy}^{1-n} d\tau_y,$$

und dies ist von der Ordnung $O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon})$, da trivialerweise $2q > p - 1$ ist. Also wird insgesamt

$$\int_T |K(x, y; \varkappa)| \, d\tau_y = O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon}). \tag{92}$$

Legt man nun p zu der Bedingung $1 > p > \dfrac{n+3}{n+4}$ (S. 158) noch die Forderung p größer als $\dfrac{n+2+\varepsilon}{n+3}$ auf, dann wird $2q - 1 + \varepsilon < 0$. Es ist also

$$U(\varkappa) \leqq U(\varkappa) \cdot O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon}),$$

da (91) für alle $x \in T$ also auch für das Maximum von $|u|$ gilt. Da nach Annahme $U(\varkappa) > 0$ ist, folgt $1 \leqq O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon})$. Es läßt sich jetzt ein $\varkappa^* > 0$ so angeben, daß alle früher bewiesenen Abschätzungen für $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa^*$ gelten und außerdem für diese $\varkappa$ dann $O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon}) < 1$ ist. Damit ist aber ein Widerspruch gefunden.

8. 4. *Es sei die Funktion* w *in der Integralgleichung* (83) *für alle* x *aus* T *und für* $|\varkappa| \to \infty$ *gleichmäßig beschränkt:* $|w| \leqq M$. *Dann ist auch* $u = u(x; \varkappa)$ *in* T *gleichmäßig beschränkt für* $\varkappa$ *mit* $|\varkappa| > \varkappa^{**}$.

Beweis. Da u in T aus $C^{(0)}$ ist, hat $|u|$ dort ein positives von $\varkappa$ abhängiges Maximum $U(\varkappa)$. Dann folgt aus der Integralgleichung (83) mit (92)

$$|u(x)| \leqq M + U(\varkappa) \, O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon}) + \operatorname*{Max}_{x \in T} |w_1(x)|. \tag{93}$$

Entsprechend wie bei dem vorhergehenden Satz erhält man

$$|w_1(x)| \leqq O(|\varkappa|^{\gamma}) \int_T |Q^*(y, x)| \, d\tau_y = O(|\varkappa|^{\gamma}) \, O(|\varkappa|^{2q-2}),$$

und dies ist von der Ordnung $O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon})$. Da (93) für alle $x \in T$ gilt, so folgt

$$U(\varkappa) \, (1 - O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon})) \leqq M + O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon}).$$

Und daraus ergibt sich für $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa^{**}$ dann

$$U(\varkappa) < 2M + O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon}) = O(1).$$

Bemerkung. Unter der Voraussetzung $Q(x, y) = Q^*(y, x)$ ist die Funktion w in (83) eine Lösung von (82). Es gibt tatsächlich Lösungen von (82), die für alle $x \in T$ und

$|\varkappa| > \varkappa^{**}$ gleichmäßig beschränkt sind. Der Operator $\mathfrak{M}_x - \varkappa^2 h$ habe konstante Koeffizienten, und es sei $\bar{y}$ ein fester Punkt außerhalb von T und $n > 2$. Dann ist z. B. die Funktion

$$w(x) = \sigma^{-\frac{\nu}{2}}(x, \bar{y})\, H_\nu^{(1)}\left(i\alpha\sigma^{\frac{1}{2}}(x, \bar{y})\right) e^{-\tau(x,\bar{y})} \tag{94}$$

eine Lösung von (82). Man vergleiche hierzu § 5. Sie unterscheidet sich von P nur durch den hier fehlenden Faktor k_ν. Aus den Abschätzungen (42) erkennt man unmittelbar die Beschränktheit für alle $|\varkappa| > \varkappa^{**}$ und alle $x \in T$.

Aus dem letzten Satz ergibt sich:

8. 5. *Ist $|w| \leqq M$ für alle $x \in T$ und $|\varkappa| > \varkappa^{**}$, so gilt für alle $x \in T$ und $|\varkappa| > \varkappa^{**}$ gleichmäßig*

$$u(x) = w(x) + O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon}). \tag{95}$$

Um eine entsprechende Relation für die Ableitungen von u zu erhalten, beachten wir, daß für die oben angegebene Funktion (94) der Ausdruck $|\varkappa|^{-1} \cdot D_x w$ in T gleichmäßig beschränkt ist, wie man mit (43) sofort erkennt. Wir setzen jetzt für den allgemeinen Fall voraus, daß gleichmäßig für alle $x \in T' < T - \mathfrak{F}T$

$$|\varkappa|^{-1} \cdot D_x w = O(1)$$

für $|\varkappa| \to \infty$ gilt.

8. 6. *Unter den eben gemachten Voraussetzungen gilt gleichmäßig in $T' < T - \mathfrak{F}T$ die Relation*

$$\frac{1}{|\varkappa|}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \frac{1}{|\varkappa|}\frac{\partial w(x)}{\partial x_j} + O(|\varkappa|^{2q-p+\varepsilon}) \tag{96}$$

für $|\varkappa| > \varkappa' > 0$.

Beweis. Zunächst folgt aus (83) durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf $T'' < T - \mathfrak{F}T$, $T'' \in A^{(1,\lambda)}$ für $x \in T' < T'' - \mathfrak{F}T$ (man vgl. (89)):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial w}{\partial x_j} &- \int\limits_T \frac{\partial Q^*(y,x)}{\partial x_j} D(y)\, d\tau_y + \int\limits_T \frac{\partial Q^*(y,x)}{\partial x_j}\left[A(y) - \sum_k \frac{\partial B_k(y)}{\partial y_k}\right] u(y)\, d\tau_y \\ &+ \int\limits_{T''} \frac{\partial Q^*(y,x)}{\partial x_j} \sum_k \frac{\partial (B_k u)}{\partial y_k}\, d\tau_y - \int\limits_{\mathfrak{F}T''} \frac{\partial Q^*(y,x)}{\partial x_j} \sum_k B_k(y)\, u(y)\, X_k(y)\, d\sigma_y \\ &- \int\limits_{T-T''} \sum_k B_k(y) \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial x_j}[Q^*(y,x)]\, u(y)\, d\tau_y.\end{aligned} \tag{97}$$

Wird jetzt mit $U(\varkappa)$ das positive Maximum von $|\varkappa|^{-1} \cdot |D_x u|$ in T' bezeichnet, so folgt weiter, daß die ersten drei Integrale nach Multiplikation mit $|\varkappa|^{-1}$ von der Ordnung $O(|\varkappa|^{2q-p+\varepsilon})\,(1 + U(\varkappa))$ sind. Hierzu muß nur (75′) beachtet werden. Für das Integral über $\mathfrak{F}T''$ werde $\varkappa$ so gewählt, daß $\frac{2}{|\varkappa|^p} < \operatorname{Min} r_{xy}$ für $x \in T'$, $y \in \mathfrak{F}T''$ ist. Dann wird zur Abschätzung für $x \in T'$ nur die zweite Formel von (75′) benötigt. Diese gibt dann

$$\frac{1}{|\varkappa|}\left|\int\limits_{\mathfrak{F}T''} \cdots d\sigma_y\right| \leqq \frac{1}{|\varkappa|} O(|\varkappa|^{2q-p+\beta}) = O(|\varkappa|^{2q-p-1+\varepsilon}).$$

Schließlich folgt dann für das letzte Integral mit (78) die Ordnung

$$O(|\varkappa|^{\varepsilon-1+2q+1-p}) = O(|\varkappa|^{2q-p+\varepsilon}),$$

und hier ist der Exponent wegen $1 > p > \frac{n+2+\varepsilon}{n+3}$ auch negativ. Wie in dem vorhergehenden Satz ergibt sich

$$U(\varkappa)\,(1 + O(|\varkappa|^{2q-p+\varepsilon})) < O(|\varkappa|^{2q-p+\varepsilon}) + M,$$

wenn M eine obere Schranke für $|\varkappa|^{-1} \cdot |D_x w|$ in T' darstellt. Hieraus folgt wie oben für $|\varkappa| > \varkappa'$ dann $U(\varkappa) < 2M + O(|\varkappa|^{2q-p+\varepsilon})$, d. h. $|\varkappa|^{-1} |D_x u|$ ist in T' beschränkt. Damit folgt dann aus (97) die Behauptung (96).

Wir betrachten jetzt die homogene Differentialgleichung (79). Dann ist $w_1 \equiv 0$. Es läßt sich zeigen, daß die Relation von 8. 5 auch aus einer Normierungsbedingung für u folgt; es kann also auf die Beschränktheit von w bezüglich $\varkappa$ verzichtet werden ([6]).

8. 7. *Es sei $u(x)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung* (79). *Die Funktion u kann dann so normiert werden, daß $\int_T |u(x)|^\varrho d\tau_x = 1$ mit $\varrho = \frac{pn}{q}$ ist. Dann gilt für beliebige Funktionen w in* (83) *gleichmäßig in T die Beziehung*

$$u(x) = w(x) + O(|\varkappa|^{2q-1+\varepsilon}) \tag{99}$$

für alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \tilde{\varkappa} > 0$.

Beweis. Die Funktion u genügt dann der Integralgleichung (83) mit $w_1 \equiv 0$. Dann folgt aus (83) mit der Hölderschen Ungleichung

$$|u(x) - w(x)| \leqq \int_T |K(x, y; \varkappa)\, u(y)|\, d\tau_y \leqq \left\{\int_T |K(x, y; \varkappa)|^\sigma d\tau_y\right\}^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \left\{\int_T |u(y)|^\varrho d\tau_y\right\}^{\frac{1}{\varrho}}.$$

Dabei ist $\frac{1}{\sigma} = 1 - \frac{1}{\varrho} = \frac{pn-q}{pn}$; $0 < \frac{1}{\sigma} < 1$ (es ist $pn - q > pn - \frac{p}{2} > 0$). Das Integral über T wird in zwei Integrale über $S(x; |\varkappa|^{-p})$ und $T - S(x; |\varkappa|^{-p})$ zerlegt und jedes für sich mit (74) und (75) abgeschätzt. Es ist

$$\begin{aligned}
&\int_T |K(x, y; \varkappa)|^\sigma d\tau_y \\
&\leqq C\,|\varkappa|^{\varepsilon\sigma} \left\{ \int_{S(x;|\varkappa|^{-p})} |\varkappa|^{\sigma(p+q-1)} r_{xy}^{(1-n)\sigma} d\tau_y + \int_{T-S(x;|\varkappa|^{-p})} r_{xy}^{(1-n)\sigma} (e^{-k|\varkappa| r_{xy}} + |\varkappa|^{2q-1})^\sigma d\tau_y \right\} \\
&\leqq C'\,|\varkappa|^{(\varepsilon+2q-1)\sigma} [|\varkappa|^{\sigma(p-q)-p[(n-1)(1-\sigma)+1]} + 1].
\end{aligned}$$

Dabei wurde $e^{-k|\varkappa| r_{xy}} \leqq (k\,|\varkappa|\, r_{xy})^{-1}$ und $\sigma(p-q) = p(n-1)(1-\sigma) + p$ benützt. Also gilt $|u(x) - w(x)| \leqq C\,|\varkappa|^{\varepsilon+2q-1}$.

Aus (99) folgt

$$\int_T |w|^\varrho d\tau = O(1)$$

oder genauer

$$\int_T |w|^\varrho d\tau = O(1) + O(|\varkappa|^{(\varepsilon+2q-1)p}).$$

Es braucht hierzu nur (99) in die ϱ-te Potenz erhoben und die Ungleichung

$$|\alpha + \beta|^\varrho \leqq 2^\varrho (|\alpha|^\varrho + |\beta|^\varrho) \quad (\alpha, \beta \text{ komplex})$$

beachtet zu werden.

Wir wollen jetzt das Verhalten der Lösungen u und w der homogenen Gleichungen (79) bzw. (82) und ihrer Ableitungen für $|\varkappa| \to \infty$ untersuchen und zeigen, daß ihre Beträge mit $|\varkappa|$ für $|\varkappa| \to \infty$ höchstens von der Ordnung η bzw. $1 + \eta$ anwachsen, wobei η eine beliebig kleine positive Zahl ist (man vgl. [6], [8]). Hierzu leiten wir zunächst eine Formel ab, die eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes vom arithmetischen Mittel für harmonische Funktionen darstellt.

Es sei w eine Lösung von (82) in dem beschränkten Gebiet C des R_n und $L(x, y) = Q^*(x, y)$. Dann folgt aus Formel (25)

$$w(x) = \int_{\mathfrak{F}T} \{Q^*(y, x)\, \mathfrak{P}_y(w(y)) - w(y)\, \mathfrak{Q}_y(Q^*(y, x))\}\, d\sigma_y.$$

Es werde nun T speziell als Hyperkugel $S(x;\, r)$ gewählt, so daß $S(x;\, r) < C$ ist. Dann ist wegen (12) und (13) nach Multiplikation obiger Gleichung mit r und Beachtung von $X_p = \dfrac{y_p - x_p}{r}$:

$$rw(x) = \int\limits_{\mathfrak{F}S(x;\, r)} \Big\{ Q^*(y, x) \sum_{p,q} a_{pq}(y)\,(y_p - x_p) \frac{\partial w}{\partial y_q} - \sum_{p,q} (y_p - x_p) \frac{\partial}{\partial y_q} \left(a_{pq}(y)\, Q^*(y, x)\right) w(y) + \sum_p b_p(y_p - x_p)\, w(y)\, Q^*(y, x) \Big\}\, d\sigma_y .$$

Diese Beziehung gilt für festes x für alle r mit $0 \leqq r \leqq r_0$, wenn $r_0 > 0$ so gewählt ist, daß die Hyperkugel $S(x;\, r_0) < C$ ist. Wir können über r von 0 bis r_0 integrieren und erhalten eine neue Identität in x:

$$w(x) \frac{r_0^2}{2} = \int\limits_{S(x;r_0)} \Big\{ \sum_{p,q} \frac{\partial}{\partial y_q} \left(Q^* w a_{pq}(y_p - x_p)\right) - w(y) \Big[Q^* \sum_p a_{pp} + 2 \sum_{p,q} (y_p - x_p) \frac{\partial}{\partial y_q} (a_{pq} Q^*) - \sum_p b_p(y_p - x_p)\, Q^* \Big] \Big\}\, d\tau_y .$$

Die rechte Seite ist mit dem Gaußschen Satz und (16) weiter gleich

$$\int\limits_{\mathfrak{F}S(x;\, r_0)} Q^*(y, x)\, w(y)\, \pi(x, y) \frac{d\sigma_y}{r_0} - \int\limits_{S(x;\, r_0)} w(y) \Big[Q^*(y, x) \Big(\sum_p a_{pp} - \sum_p b_p(y_p - x_p) \Big) + 2 \sum_{p,q} (y_p - x_p) \frac{\partial}{\partial y_q} \left(a_{pq} Q^*(y, x)\right) \Big]\, d\tau_y .$$

Diese Formel gilt wiederum für alle r_0 mit $0 \leqq r_0 \leqq R_0$, wenn R_0 so gewählt ist, daß $S(x;\, R_0) < C$ ist. Integration über r_0 von 0 bis R_0 gibt dann

$$w(x) \frac{R_0^3}{6} = \int\limits_{S(x;\, R_0)} Q^*(y, x)\, w(y)\, \pi(x, y)\, r_0^{-1} d\tau_y - \int\limits_0^{R_0} \int\limits_{S(x;\, r_0)} w(y)\, [\cdots]\, d\tau_y dr_0 .$$

Hierbei ist $d\tau_y = r^{n-1} dr \prod\limits_{j=1}^{n-1} (\sin \vartheta_j)^{n-1-j} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \cdots d\vartheta_{n-1}$. Nun gilt

$$I = \int\limits_0^{R_0} \int\limits_{S(x;\, r_0)} w(y)\, [\cdots]\, d\tau_y dr_0 = \int\limits_0^{R_0} \int\limits_0^{r_0} \int\limits_{\vartheta} F(r, \vartheta_j) \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \vartheta_j)^{n-1-j} d\vartheta_1 \cdots d\vartheta_{n-2} r^{n-1} dr dr_0 .$$

Es ist $F(r, \vartheta_j)\, r^{n-1} = O(r)$, da $[\cdots] \in N^{(2)}$ ist. Also kann die Integrationsfolge vertauscht werden. Das gibt

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{R_0} \int\limits_r^{R_0} \Big(\int\limits_{\vartheta_j} F(r, \vartheta_j) \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \vartheta_j)^{n-1-j} d\vartheta_1 \cdots d\vartheta_{n-1} r^{n-1} \Big)\, dr_0 dr \\ &= \int\limits_0^{R_0} (R_0 - r) \int\limits_{\vartheta_j} F(r, \vartheta_j) \prod_{j=1}^{n-1} (\sin \vartheta_j)^{n-1-j} d\vartheta_1 \cdots d\vartheta_{n-1} r^{n-1} dr \\ &= \int\limits_{S(x;\, R_0)} (R_0 - r)\, F(r, \vartheta_j)\, d\tau_y . \end{aligned}$$

Damit haben wir endlich (r bedeutet den Abstand $\overline{xy}$):

$$w(x) \frac{R_0^3}{6} = \int\limits_{S(x;\, R_0)} w(y)\, \mathfrak{J}(x, y)\, d\tau_y . \tag{100}$$

Dabei bedeutet

$$\mathfrak{J}(x, y) = Q^*(y, x) \Big[r_{xy}^{-1} \pi(x, y) + (r_{xy} - R_0) \Big\{ \sum_p \left(a_{pp} - b_p(y_p - x_p)\right) + 2 \sum_{p,q} (y_p - x_p) \frac{\partial}{\partial y_q} a_{pq} \Big\} \Big] + 2(r_{xy} - R_0) \sum_{p,q} a_{pq}(y_p - x_p) \frac{\partial Q^*(y, x)}{\partial y_q} .$$

Dies ist die gewünschte Verallgemeinerung des Satzes vom arithmetischen Mittel. Man erkennt sofort, daß $\mathfrak{J}(x, y) \in N^{(2)}$ und $\frac{\partial}{\partial x_j}\mathfrak{J}(x, y) \in N^{(1)}$ ist.

Wir untersuchen die $\varkappa$-Abhängigkeit von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_{x_j}$. Es ist $r_{xy} \leqq R_0$, und es sei $R_0 = \frac{c}{|\varkappa|}$ mit $0 < c < 1$. Dann folgt mit (17), (74), (75) und (78) für $r_{xy} \leqq \frac{1}{|\varkappa|}$

$$|\mathfrak{J}| \leqq C \begin{cases} |\varkappa|^{-1} r_{xy}^{2-n} & \text{für } n > 2, \\ |\varkappa|^{-1-\alpha} r_{xy}^{-\alpha}, \ 0 < \alpha < 1, & \text{für } n = 2, \end{cases}$$

bzw.

$$|\mathfrak{J}_{x_j}| \leqq C\,|\varkappa|^{q-1} r_{xy}^{1-n} \quad \text{für } n \geqq 2.$$

Das gibt dann mit $\sigma = \frac{pn}{pn - q}$

$$\int\limits_{S(x;\,R_0)} |\mathfrak{J}(x, y)|^{\sigma} d\tau_y = O(|\varkappa|^{-n+(n-3)\sigma}) \text{ für } n \geqq 2 \tag{101}$$

(es ist $(2 - n)\,\sigma + n > 0$ für $n > 2$ und $2 - \sigma\alpha > 0$ für $n = 2$ bei geeigneter Wahl von $\alpha < 1$) und

$$\int\limits_{S(x;\,R_0)} \left| \frac{\partial \mathfrak{J}(x, y)}{\partial x_j} \right| d\tau_y = O(|\varkappa|^{q-2}) \text{ für } n \geqq 2. \tag{102}$$

Wir beweisen jetzt den folgenden Satz:

8. 8. *Die Funktion $w(x)$ genüge in C der Differentialgleichung* (82)

$$(\mathfrak{M}_x - \varkappa^2 h(x))\, w = 0,$$

und es sei

$$\int\limits_T |w(x)|^{\varrho} d\tau_x \leqq l,$$

wobei l $(l > 0)$ eine von $\varkappa$ unabhängige Konstante bedeutet und $\varrho = \frac{pn}{q}$ ist. Dann gilt in jedem Bereich $T' < T - \mathfrak{F}T$, $T < C$, dessen Punkte x von $\mathfrak{F}T$ mindestens den Abstand $\frac{1}{|\varkappa|}$ haben, die Relation

$$w(x) = O(|\varkappa|^{\eta})$$

gleichmäßig für alle $x \in T'$. Hierbei ist η eine beliebig kleine positive Zahl.

Beweis. Es sei x aus T' fest gewählt. Die Hyperkugel $S(x;\, R_0)$ mit $R_0 = (2\,|\varkappa|)^{-1}$ liegt dann ganz in T. Aus (100) folgt mit der Hölderschen Ungleichung und (101)

$$|w(x)| \leqq \frac{6}{R_0^3} \left\{ \int\limits_{S(x;\,R_0)} |u(y)|^{\varrho} d\tau_y \right\}^{\frac{1}{\varrho}} \cdot \left\{ \int\limits_{S(x;\,R_0)} |\mathfrak{J}(x, y)|^{\sigma} d\tau_y \right\}^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Nun kann man sich die positive Zahl $p\,(p < 1)$, so nahe an 1 gewählt denken, daß außer der Forderung $p > \operatorname{Max}\left(\frac{n+3}{n+4}, \frac{n+2+\varepsilon}{n+3}\right)$ von Seite 162 (wobei wir die zweite Zahl bei Bildung des Maximums im Augenblick außer acht lassen können) auch

$$\frac{q}{p} + q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - p\right)(n+2)$$

kleiner als eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl η wird (es ist $q = \frac{1}{2}(1 - p)(n + 2)$). Damit ist dann unser Satz bewiesen.

8. 9. *Unter denselben Voraussetzungen wie eben gilt*

$$D_1 w(x) = O(|\varkappa|^{1+\eta})$$

gleichmäßig für alle $x \in T'$, η beliebig klein und positiv.

Beweis. Aus (100) folgt durch Differentiation nach x_j

$$\frac{\partial w(x)}{\partial x_j} = \frac{6}{R_0^3}\left\{\int\limits_{S(x;\,R_0)} w(y)\,\frac{\partial \mathfrak{J}(x,y)}{\partial x_j}\,d\tau_y + \int\limits_{\mathfrak{F}S(x;\,R_0)} w(y)\,\mathfrak{J}(x,y)\,X_j(y)\,d\sigma_y\right\}.$$

Das erste Integral ist mit dem Faktor R_0^{-3} wegen (102) von der Ordnung $O\left(|\varkappa|^{1+\varrho+\frac{q}{p}}\right)$. Da $r_{xy} = R_0$ für $y \in \mathfrak{F}S(x;\,R_0)$ ist, wird

$$\mathfrak{J}(x,y)\Big|_{y\in\mathfrak{F}S} = Q^*(y,x)\,\pi(x,y)\Big|_{y\in\mathfrak{F}S}\cdot R_0^{-1}$$

und daher mit (17), (74) und dem vorhergehenden Satz

$$R_0^{-3}\int\limits_{\mathfrak{F}S(x;\,R_0)} w(y)\,\mathfrak{J}(x,y)\,X_j(y)\,d\sigma_y = O\left(|\varkappa|^{1+\frac{q}{p}}\right).$$

Aus beiden Teilresultaten folgt dann die Behauptung entsprechend der Überlegung beim Beweis von 8. 8.

Bemerkung. Bei den zwei vorhergehenden Sätzen genügt es anzunehmen, daß w in $T - \mathfrak{F}T$ eine reguläre Lösung der Differentialgleichung (82) ist.

Diese hier angegebenen Relationen für das Anwachsen von w und $D_1 w$ in $T' < T - \mathfrak{F}T$ enthalten die Resultate von Sternberg [6] und Hammerstein [8] nicht. Dort wurde für $n = 2$ die Differentialgleichung $\Delta w + \varrho^2 w = 0$ mit $\varrho > 0$, $\varrho \to \infty$ betrachtet. Das würde bedeuten, wenn man mit (82) vergleicht, daß man $\varkappa = i\varrho$ zu setzen hätte. Es wäre also dann $\varkappa$ rein imaginär. Diesen Fall hatten wir aber von Anfang an ausgeschlossen. Der Parameter $\varkappa$ geht mit $|\varkappa|$ ins Unendliche und durchläuft dabei beliebige komplexe Werte mit Ausnahme zweier Sektoren S_1, S_2, die die imaginäre Achse der komplexen $\varkappa$-Ebene enthalten (man vgl. S. 145). Unsere Resultate ergänzen also die Ergebnisse jener Arbeiten für $n = 2$.

Wir zeigen jetzt, daß sich obige Relationen auch auf die Lösungen u der allgemeinen homogenen Differentialgleichung (79) übertragen und setzen dazu voraus, daß die Funktion w in (83) Lösung von (82) ist (man vgl. Bemerkung auf S. 162).

8. 10. *Es sei die Lösung w von* (82) *in der Integralgleichung* (83) *mit $w_1 \equiv 0$ normiert, d. h. es sei $\int\limits_T |w(x)|^\varrho\,d\tau_x \leqq l$ mit $l > 0$. Dann gilt auch für die Lösung u von* (83) *eine entsprechende Beziehung:*

$$\int\limits_T |u(x)|^\varrho\,d\tau_x \leqq k$$

für $|\varkappa|$ hinreichend groß.

Beweis. Aus der Integralgleichung (83) folgt mit der Ungleichung von Seite 164

$$|u(x)|^\varrho \leqq 2^\varrho\left(|w(x)|^\varrho + \left|\int\limits_T K(x,y)\,u(y)\,d\tau_y\right|^\varrho\right).$$

Nach Seite 164 gilt mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\left|\int\limits_T K(x,y;\varkappa)\,u(y)\,d\tau_y\right| \leqq O(|\varkappa|^{2\varrho-1+\varepsilon})\left\{\int\limits_T |u(y)|^\varrho\,d\tau_y\right\}^{\frac{1}{\varrho}}.$$

Integration über x gibt

$$\int_T |u(x)|^\varrho d\tau_x (1 - O(|\varkappa|^{2\varrho-1+\varepsilon})) \leqq 2^\varrho \int_T |w(x)^\varrho d\tau_x \leqq 2^\varrho l.$$

Für $|\varkappa|$ hinreichend groß wird die runde Klammer links größer als $\frac{1}{2}$ und damit ist die Behauptung bewiesen.

8. 11. *Unter den Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes gilt*

$$u(x) = O(|\varkappa|^\eta)$$

gleichmäßig in T', $T' < T - \mathfrak{F}T$, wenn die Punkte von T' und $\mathfrak{F}T$ mindestens den Abstand $\frac{1}{|\varkappa|}$ haben. Hierbei ist η beliebig klein und positiv.

Beweis. Mit 8. 10 folgt aus 8. 7 die Beziehung (99). Beachtet man jetzt 8. 8, so ergibt sich die Behauptung.

8. 12. *Unter denselben Voraussetzungen folgt*

$$D_1 u = O(|\varkappa|^{1+\eta})$$

gleichmäßig in T', $T' < T - \mathfrak{F}T$, wenn die Punkte von T' und $\mathfrak{F}T$ mindestens den Abstand $\frac{1}{|\varkappa|}$ haben. Hierbei ist η beliebig klein und positiv.

Beweis. Dies folgt aus (97) durch dieselben Schlüsse wie bei 8. 6 unter Verwendung der vorhergehenden Ergebnisse.

§ 9. Greensche Funktionen.

Wir werden im folgenden Randwertprobleme für die allgemeine Differentialgleichung (79) untersuchen und bestimmen hierfür zunächst Greensche Funktionen für die Gleichung

$$(\mathfrak{M}_x - \varkappa^2 h(x))\, u = 0;$$

wir fordern also, daß unsere Grundlösungen noch eine Randbedingung erfüllen.

Für das Dirichletsche (erste) Randwertproblem werde

$$G(x, y) = Q^*(y, x) + v(x, y)$$

gesetzt, wobei Q^* die Grundlösung (47*) von S. 147 und $v(x, y)$ eine in $T - \mathfrak{F}T$ reguläre Lösung von $(\mathfrak{M}_y^* - \varkappa^2 h(y))\, u(y) = 0$ darstellt, die außerdem in T stetig ist und auf dem Rand $\mathfrak{F}T$ die Bedingung

$$v(x, y) = -Q^*(y, x) \text{ für } y \in \mathfrak{F}T,\ x \in T - \mathfrak{F}T \tag{103}$$

erfüllt. Der Bereich T sei aus der Klasse $A^{(1,\lambda)}$ mit $\lambda > 0$. Die Funktion v werde durch einen Ansatz mit einem Potential der Doppelschicht bestimmt. Wir setzen

$$v(x, y) = -2 \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_\eta Q^*(y, \eta)\, \zeta(\eta, x)\, d\sigma_\eta. \tag{104}$$

Hierbei bedeutet $\mathfrak{P}$ den Differentialoperator aus (12) und $\zeta(\eta, x)$ eine solche unbekannte Funktion, daß der Satz 4. 24 angewendet werden kann. Läßt man jetzt unter Beachtung dieses Satzes in (104) für festes $x \in T - \mathfrak{F}T$ den Punkt y aus $T - \mathfrak{F}T$ gegen einen beliebigen Punkt ξ auf $\mathfrak{F}T$ konvergieren, so folgt mit unserer Forderung (103)

$$\zeta(\xi, x) - 2 \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_\eta (Q^*(\xi, \eta))\, \zeta(\eta, x) = -Q^*(\xi, x). \tag{105}$$

Das ist für ζ eine Integralgleichung mit dem Kern

$$(106)\quad K(\xi,\eta) = 2\mathfrak{P}_\eta Q^*(\xi,\eta) = 2\sum_{p,q} a_{pq}(\eta)\, X_p(\eta)\, \frac{\partial}{\partial \eta_q} Q^*(\xi,\eta) + 2\beta(\eta)\, Q^*(\xi,\eta).$$

Nach Voraussetzung ist $T \in A^{(1,\lambda)}$, und damit ist der Kern aus $N^{(1+\lambda)}$ auf $\mathfrak{F}T$, wie wir früher gesehen haben (27). Folglich gilt für (105) die Fredholmsche Theorie. Wir zeigen, daß für hinreichend großes $|\varkappa|$ die Integralgleichung genau eine Lösung besitzt; sie lautet

$$(107)\qquad \zeta(\xi,x) = -Q^*(\xi,x) - \int_{\mathfrak{F}T} \Gamma(\xi,\eta)\, Q^*(\eta,x)\, d\sigma_\eta,$$

wobei der lösende Kern Γ die Gestalt

$$(108)\qquad \Gamma(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} K^{(m)}(\xi,\eta)$$

mit $K^{(1)}(\xi,\eta) = K(\xi,\eta)$ und $K^{(m)}(\xi,\eta) = \int_{\mathfrak{F}T} K(\xi,\zeta)\, K^{(m-1)}(\zeta,\eta)\, d\sigma_\zeta$ besitzt. Aus Satz 4.2 folgt induktiv $K^{(m)}(\xi,\eta) \in N^{(1+m\lambda)}$ auf $\mathfrak{F}T$; die Kerne sind also für $m > \dfrac{n-1}{\lambda}$ stetig auf $\mathfrak{F}T$. Zunächst gilt wegen (106) mit (74) und (75) unter Beachtung der Überlegungen zu (26) von Seite 140:

$$(109)\quad |K(\xi,\eta)| \leqq \frac{C}{r_{\xi\eta}^{n-1-\lambda}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-1} & n \geqq 2,\ r_{\xi\eta} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ e^{-k|\varkappa| r_{\xi\eta}} + |\varkappa|^{2q-p} & n \geqq 2,\ r_{\xi\eta} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Wir schätzen nun die iterierten Kerne ab. Es gilt der Satz:

9.1. *Es ist für $m \geqq 2$, $n \geqq 2$ bei beliebiger Lage von ξ und η auf $\mathfrak{F}T$*

$$|K^{(m)}(\xi,\eta)| \leqq \frac{CQ^{m-1}}{r_{\xi\eta}^{n-1-\lambda}} \text{ mit } Q = CC_1 |\varkappa|^{-\tau}.$$

Dabei ist

$$\tau = p\lambda + 2 - 2(p+q) = p(n+\lambda) - n,$$

l eine natürliche Zahl größer als $\dfrac{1-2q}{1-p}$, R_0 der Durchmesser von T und

$$C_1 = \operatorname{Max}\left(C' 2^l,\ C'\left(\frac{2l!}{k^l}\right)^2 R_0^l,\ C'' \lambda^{-1} 2^{n-\lambda} \omega_{n-1}\right).$$

Die Bedeutung der Konstanten C', C'' ergibt sich beim Beweis.

Beweis. Die Punkte ξ und η auf $\mathfrak{F}T$ werden während der ganzen Betrachtung festgehalten. Nach unseren Voraussetzungen über $\mathfrak{F}T$ gibt es um ξ und η Hyperkugeln $S(\xi)$ und $S(\eta)$, so daß in diesen Kugeln die Fläche eine Darstellung der Gestalt (1) besitzt, wenn man ξ bzw. η als Ursprung eines n-dimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystems ansieht. Die Funktion ζ in (1) ist in einem Gebiet des R_{n-1} definiert und dort aus der Klasse $C^{(1,\lambda)}$. Wir können annehmen, daß $\lambda < 1$ ist. Man denke sich ξ_n in Richtung der äußeren Normalen. Nun sei $\varkappa$ fest gewählt mit $|\varkappa| > \varkappa_4$, und zwar sei der Betrag von $\varkappa$ so groß, daß die Hyperkugeln $\bar{S} = S(\xi; |\varkappa|^{-p})$ und $\bar{\bar{S}} = S(\eta; |\varkappa|^{-p})$ noch ganz in den erwähnten Hyperkugeln enthalten sind. Dann sei

$$\sigma_1 = \mathfrak{F}T \cap \bar{S} \cap \bar{\bar{S}},\ \sigma_2 = \mathfrak{F}T \cap (\bar{S} - \bar{\bar{S}}),\ \sigma_2' = \mathfrak{F}T \cap (\bar{\bar{S}} - \bar{S}).$$

Ferner sei σ_3 derjenige Teil von $\mathfrak{F}T$, der nicht in $\bar{S} \cup \bar{\bar{S}}$ liegt, und für dessen Punkte ζ gilt: $r_{\xi\zeta} \leqq r_{\eta\zeta}$; σ_3' sei schließlich derjenige Teil von $\mathfrak{F}T$, der nicht in $\bar{S} \cup \bar{\bar{S}}$ liegt, und für dessen Punkte ζ gilt: $r_{\xi\zeta} \geqq r_{\eta\zeta}$. Dann ist $\mathfrak{F}T = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_2' \cup \sigma_3 \cup \sigma_3'$, und jedes

Integral über $\mathfrak{F}T$ kann entsprechend diesen Mengen in Teilintegrale zerlegt werden, die wir jedes für sich abschätzen. Dabei unterscheiden wir wieder drei Fälle

$$\text{a) } r_{\xi\eta} \leqq |\varkappa|^{-p}, \qquad \text{b) } |\varkappa|^{-p} < r_{\xi\eta} \leqq 2\,|\varkappa|^{-p}, \qquad \text{c) } 2\,|\varkappa|^{-p} < r_{\xi\eta}.$$

Die Behauptung wird nun induktiv bewiesen. Für $m = 2$ folgt mit (109) zunächst als Majorante

$$C^2\,|\varkappa|^{2(p+q-1)} \int\limits_{\sigma_1} \frac{d\sigma_\zeta}{r_{\xi\zeta}^{n-1-\lambda}\, r_{\zeta\eta}^{n-1-\lambda}}.$$

In a) und b) ist das Integral nach 4. 2 durch $C' r_{\xi\eta}^{1+2\lambda-n}$ zu ersetzen, wobei der Integrationsbereich σ_1 vorher durch $\mathfrak{F}T$ vergrößert wurde. Im Fall c) tritt das Integral nicht auf. Man hat also bei Beachtung der Definition von a) und b) als obere Schranke

$$C^2 C'\,|\varkappa|^{2(p+q-1)-\lambda p}\, 2^\lambda r_{\xi\eta}^{1+\lambda-n} \leqq CQ r_{\xi\eta}^{1+\lambda-n}.$$

Als nächster Term ist zu beachten

$$C^2\,|\varkappa|^{p+q-1} \int\limits_{\sigma_2} \frac{e^{-k|\varkappa| r_{\zeta\eta}} + |\varkappa|^{2q-p}}{r_{\xi\zeta}^{n-1-\lambda}\, r_{\zeta\eta}^{n-1-\lambda}}\, d\sigma_\zeta.$$

Da in a) und b) $r_{\eta\zeta} \geqq |\varkappa|^{-p} \geqq \frac{1}{2}\, r_{\xi\eta}$ und in c) ebenso $r_{\eta\zeta} \geqq \frac{1}{2}\, r_{\xi\eta}$ gilt, folgt aus obigem bei Ersetzung des Zählers durch 2 zunächst die Majorante

$$C^2\,|\varkappa|^{p+q-1} \frac{2^{n-\lambda}}{r_{\xi\eta}^{n-1-\lambda}} \int\limits_{\sigma_2} \frac{d\sigma_\zeta}{r_{\xi\zeta}^{n-1-\lambda}}.$$

Der Integrationsbereich σ_2 wird durch die Teilfläche von $\mathfrak{F}T$ ersetzt, die in $\bar{S}$ liegt, und da dort $d\sigma_\zeta < C'' d\sigma_{\zeta'}$ gilt, wenn ζ' die Projektion von ζ auf die Tangentialebene an $\mathfrak{F}T$ in ξ bezeichnet, erhält man ein Integral über die $(n-1)$-dimensionale Hyperkugel vom Radius $|\varkappa|^{-p}$ um ξ in der Tangentialebene. Man bekommt also weiter

$$C^2\,|\varkappa|^{p+q-1} \frac{2^{n-\lambda}}{r_{\xi\eta}^{n-1-\lambda}}\, C'' \omega_{n-1} \int\limits_0^{|\varkappa|^{-p}} \varrho^{i-1}\, d\varrho \leqq CQ r_{\xi\eta}^{1+\lambda-n}.$$

Es ist $p + q > 1$ (man sehe bei (53)). Dasselbe bekommt man für das Integral über σ_2'. Nun ist

$$C^2 \int\limits_{\sigma_3} \frac{e^{-k|\varkappa| r_{\xi\zeta}} + |\varkappa|^{2q-p}}{r_{\xi\zeta}^{n-1-\lambda}} \cdot \frac{e^{-k|\varkappa| r_{\zeta\eta}} + |\varkappa|^{2q-p}}{r_{\eta\zeta}^{n-1-\lambda}}\, d\sigma_\zeta$$

zu untersuchen. In a), b) und c) ist $r_{\xi\zeta} \geqq |\varkappa|^{-p}$ und $r_{\eta\zeta} \geqq |\varkappa|^{-p}$, und damit wird mit 4. 2 bei Ersetzung von σ_3 durch $\mathfrak{F}T$ obiger Term nicht größer als

$$C^2 \left(e^{-k|\varkappa|^{1-p}} + |\varkappa|^{2q-p}\right)^2 C' r_{\xi\eta}^{1+2\lambda-n} \leqq C^2 C_1 |\varkappa|^{4q-2p} r_{\xi\eta}^{1+2\lambda-n}.$$

Auf Seite 158 wurde die Zahl p der Bedingung $\dfrac{n+3}{n+4} < p < 1$ unterworfen. Ab jetzt werde sogar $\dfrac{n+4}{n+5} < p < 1$ angenommen. Dann wird $4q - 2p < p + 2q - 2$, und dies ist kleiner als $2p + 2q - 2 - p = -\tau$. Damit wird der letzte Ausdruck nicht größer als $CQ r_{\xi\eta}^{1+\lambda-n}$. Dasselbe bekommt man für das Integral über σ_3'.

Unter der Annahme, daß die Behauptung für m gilt, zeigt man durch dieselben Schlüsse wie eben, daß sie auch für $m + 1$ richtig ist. Dabei zeigt sich, daß man die Zahl p größer als $\dfrac{2}{3-\lambda}$ zu wählen hat. Es war $\lambda < 1$ (man vgl. S. 169) und $p < 1$ angenommen worden. Damit ist dann der Satz für alle $m \geqq 2$ bewiesen.

Die Zahl $\tau = p(n+\lambda) - n$ ist positiv, falls man p größer als $\frac{n}{n+\lambda}$ wählt. Damit wollen wir uns in Zukunft p so gewählt denken, daß

$$\operatorname{Max}\left(\frac{n+4}{n+5}, \frac{n}{n+\lambda}, \frac{2}{3-\lambda}\right) < p < 1$$

ist. Für die Reihe der iterierten Kerne vom zweiten Reihenglied an haben wir jetzt die Majorante

$$Cr_{\xi\eta}^{1+\lambda-n} \sum_{m=2}^{\infty} Q^{m-1} = Cr_{\xi\eta}^{1+\lambda-n} \frac{Q}{1-Q}.$$

Wegen $Q = CC_1 \cdot |\varkappa|^{-\tau}$ läßt sich ein $\varkappa_6 \geqq \varkappa_5$ derart finden, daß für alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_6$ dann $Q < 1$ ausfällt. Also konvergiert die Reihe der iterierten Kerne in jedem Teilbereich von $\mathfrak{F}T \times \mathfrak{F}T$, für den $\xi \neq \eta$ ist, gleichmäßig, falls $|\varkappa| > \varkappa_6$ gilt. Folglich ist $\Gamma(\xi, \eta)$ stetig für $\xi \neq \eta$. Ferner ist Γ aus $N^{(1+\lambda)}$. Damit haben wir den Satz:

9. 2. *Die Integralgleichung* (105) *hat für $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_6$ genau eine Lösung ζ, die durch* (107) *gegeben wird. Es ist $\zeta \in N^{(2)}$ in T. Für alle $\xi \in \mathfrak{F}T$ und alle $x \in T - \mathfrak{F}T$ ist $\zeta(\xi, x)$ stetig und hat dort stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung bezüglich x_j. Die Anwendung von* 4. 24 *auf den Ansatz* (104) *ist also gerechtfertigt.*

Da $Q^* \in N^{(2)}$ ist, folgt nämlich aus 4. 7, daß das Integral in (107) aus $N^{(2+\lambda)}$, für $x \in T$ also $\zeta \in N^{(2)}$ in T ist. Hieraus ergibt sich dann $v(x, y) \in N^{(2+\lambda)}$ für x, y auf $\mathfrak{F}T$ mit 4. 2. Ferner ist $v(x, y)$ für alle x, y aus $T - \mathfrak{F}T$ stetig und dort bezüglich x_j und y_j zweimal stetig partiell differenzierbar und stellt bezüglich y in $T - \mathfrak{F}T$ eine reguläre Lösung von (82) dar, wie man sofort sieht.

Aus 4. 24 und (105) folgt $\zeta(\xi, x) \in C^{(0,\mu)}$ bezüglich $\xi \in \mathfrak{F}T$ mit beliebigem $\mu < 1$ und $x \in T' < T - \mathfrak{F}T$. Ist $\beta \in C^{(0,\mu)}$ und wird $\mu > 1 - \lambda$ angenommen, so ergibt sich aus 4. 25 und (105) dann $\zeta(\xi, x) \in C^{(1,\lambda)}$ bezüglich $\xi \in \mathfrak{F}T$ für alle $x \in T'$. Dann ist nach 4. 26 die Funktion

$$v(x, y) = \begin{cases} v(x, y) & y \in T - \mathfrak{F}T, \\ -Q^*(y, x) & y \in \mathfrak{F}T \end{cases}$$

in T bezüglich y aus $C^{(1,\lambda)}$ für alle $x \in T'$. Hierdurch kann man sich dann auch die Werte von $\frac{\partial}{\partial y_j} G(x, y)$ für y bis auf $\mathfrak{F}T$ fortgesetzt denken. Damit folgt:

9. 3. *Die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y_j} G(x, y)$ der Greenschen Funktion $G(x, y)$ erfüllen bezüglich y in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $T' \times T$, für den $x \neq y$ ist, eine H-Bedingung zum Exponenten λ.*

Bezeichnet $G^*(x, y)$ die Greensche Funktion des adjungierten Problems (man vgl. § 3), so gilt bekanntlich ([1], S. 17)

$$G(x, y) = G^*(y, x). \tag{110}$$

Daraus folgt, daß $G(x, y)$ in x Lösung der Gleichung (82) für $x \in T - \mathfrak{F}T - y$ und $G(x, y) = 0$ für $x \in \mathfrak{F}T$, $y \in T - \mathfrak{F}T$ ist.

Zur Behandlung der zweiten Randwertaufgabe für (79) setzen wir

$$G'(x, y) = Q^*(y, x) + v'(x, y),$$

wobei $v'(x, y)$ in y eine reguläre Lösung von

$$(\mathfrak{M}_y^* - \varkappa^2 h(y))\, u(y) = 0$$

in $T - \mathfrak{F}T$ darstellt, die außerdem in T stetig ist und auf $\mathfrak{F}T$ der Bedingung

$$\mathfrak{D}_y(v'(x, y)) = -\mathfrak{D}_y(Q^*(y, x)), \quad y \in \mathfrak{F}T, \quad x \in T - \mathfrak{F}T \tag{111}$$

genügt. Durch den Ansatz

$$v'(x, y) = 2 \int_{\mathfrak{F}T} Q^*(y, \eta)\, \zeta'(\eta, x)\, d\sigma_\eta \tag{112}$$

als Potential der einfachen Schicht mit unbekannter Funktion ζ' folgt für $\mathfrak{D}_y(v'(x, y))$ mit $y \to \xi$, $\xi \in \mathfrak{F}T$ aus 4. 22 wegen (111) die Integralgleichung

$$\zeta'(\xi, x) + 2 \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{D}_y Q^*(\xi, \eta)\, \zeta'(\eta, x)\, d\sigma_\eta = - \mathfrak{D}_y Q^*(\xi, x). \tag{113}$$

Wegen $T \in A^{(1,\lambda)}$ ist der Kern

$$K'(\xi, \eta) = - 2 \mathfrak{D}_y Q^*(\xi, \eta)$$

wie (106) aus $N^{(1+\lambda)}$ (man vgl. (26)). Folglich gilt die Fredholmsche Theorie. Der Kern hat bezüglich $\varkappa$ dasselbe Verhalten wie $K(\xi, \eta)$ aus (109) und damit existiert auch hier für $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_7 \geqq \varkappa_6$ eine Resolvente Γ', die die entsprechenden Eigenschaften wie Γ hat. Also folgt

$$\zeta'(\xi, x) = - \mathfrak{D}_y Q^*(\xi, x) - \int_{\mathfrak{F}T} \Gamma'(\xi, \eta)\, \mathfrak{D}_y Q^*(\eta, x)\, d\sigma_\eta. \tag{114}$$

Man erkennt leicht analog zu 9. 2 den Satz:

9. 4. *Die Integralgleichung* (113) *hat für $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_7$ genau eine Lösung ζ', die durch* (114) *gegeben wird. Es ist $\zeta' \in N^{(1+\lambda)}$ für ξ und x auf $\mathfrak{F}T$, sonst ist $\zeta' \in N^{(1)}$. Für alle $\xi \in \mathfrak{F}T$ und $x \in T$ mit $\xi \neq x$ ist ζ' stetig. Für $\xi \in \mathfrak{F}T$ und $x \in T - \mathfrak{F}T$ hat $\zeta'(\xi, x)$ stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach x_j. Die Anwendung von* 4. 22 *auf unseren Ansatz* (112) *ist also gerechtfertigt.*

Die Funktion v' hat dann dieselben Eigenschaften wie v, wie man leicht sieht.

9. 5. *Die Greensche Funktion $G'(x, y)$ ist stetig für alle $(x, y) \in T \times T$ mit $x \neq y$. Die Ableitung $\frac{\partial}{\partial y_j} G'(x, y)$ erfüllt bezüglich y in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $T' \times T$, für den $x \neq y$ ist, eine H-Bedingung zu einem Exponenten $\mu < \lambda$.*

Ist $\beta \in C^{(0,\mu)}$ und $\mu < \lambda$, so ist das Integral in (113) nach 4. 22 aus $C^{(0,\mu)}$, somit auch $\zeta'(\xi, x) \in C^{(0,\mu)}$ für $\xi \in \mathfrak{F}T$ und $x \in T'$, $T' \subset T - \mathfrak{F}T$. Dann läßt sich $\frac{\partial}{\partial y_j} v(x, y)$ nach 4. 21 für $y \in \mathfrak{F}T$ stetig fortsetzen, so daß $\frac{\partial}{\partial y_j} v(x, y)$ bezüglich y in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $T' \times T$, für den $x \neq y$ ist, eine H-Bedingung zum Exponenten μ erfüllt.

Bezeichnet $G'^*(x, y)$ die Greensche Funktion des adjungierten Problems, so gilt auch hier

$$G'(x, y) = G'^*(y, x). \tag{115}$$

Damit ist dann also $G'(x, y)$ bezüglich x Lösung von (82) für $x \in T - \mathfrak{F}T - y$ und $\mathfrak{P}_x(G'(x, y)) = 0$ für $x \in \mathfrak{F}T$, $y \in T - \mathfrak{F}T$.

§ 10. Die $\varkappa$-Abhängigkeit der Greenschen Funktionen.

Wir untersuchen jetzt die $\varkappa$-Abhängigkeit von G und G'. Zunächst ist wegen (108), (109) und 9. 1 für alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa_7$ und alle ξ, η auf $\mathfrak{F}T$ für $n \geqq 2$

$$|\Gamma(\xi, \eta)| \leqq \frac{C}{r_{\xi\eta}^{n-1-\lambda}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-1} & r_{\xi\eta} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ e^{-k|\varkappa| r_{\xi\eta}} + |\varkappa|^{-\tau} & r_{\xi\eta} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases} \tag{116}$$

Dieselbe Abschätzung gilt für Γ'. Wir wollen uns auf $n \geqq 3$ beschränken. Für $n = 2$ lassen sich entsprechende Überlegungen ausführen. Es wird jetzt ζ und v betrachtet. Die Beweise für die benötigten Abschätzungen sind entsprechend den von uns schon früher ausgeführten Schlüssen (z. B. bei Satz 9. 1) auszuführen. Sie sollen im folgenden unterdrückt werden, da es sich im wesentlichen nur um Wiederholungen handeln würde. Wir werden lediglich einige Etappen des Gedankenganges aufzeigen.

Aus den beiden Abschätzungen (74) für Q^* bekommt man sofort

$$(117) \qquad |Q^*(x, y)| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-2+\varepsilon'}} \begin{cases} |\varkappa|^{2p+q-2-\varepsilon' p} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{p+2q-2-\varepsilon' p} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Hierbei sei $0 \leqq \varepsilon' < 1$ und ε' sonst beliebig. Eine geeignete Wahl dieser Zahl erlaubt es uns, möglichst günstige obere Schranken zu finden. Betrachtet man jetzt die der Funktion $\zeta(\xi, x)$ entsprechende Formel (107), so hat man diese Funktion für alle $\xi \in \mathfrak{F}T$ und alle $x \in T$ abzuschätzen. Denkt man sich etwa wie bei dem Satz 9. 1 die Hyperkugeln $S(\xi; |\varkappa|^{-p})$ und $S(x; |\varkappa|^{-p})$ gebildet und betrachtet man die dort eingeführten Mengen σ_1, σ_i und σ_i' $(i = 2, 3)$, so bekommt man

$$\left| \int_{\mathfrak{F}T} \Gamma Q^* \, d\sigma \right| \leqq \frac{C}{r_{\xi x}^{n-2+\varepsilon'}} \begin{cases} |\varkappa|^{3p+2q-\varepsilon' p-\tau p-3} & r_{\xi x} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{2p+q-2-\varepsilon' p-\tau} & r_{\xi x} > |\varkappa|^{-p} \end{cases}$$

für alle $\xi \in \mathfrak{F}T$ und alle $x \in T$. Dies gibt dann wegen (107)

$$|\zeta(\xi, x)| \leqq \frac{C}{r_{\xi x}^{n-2+\varepsilon'}} \begin{cases} |\varkappa|^{2p+q-2-\varepsilon' p} & r_{\xi x} \leqq |\varkappa|^{-\eta}, \\ |\varkappa|^{2p+q-2-\varepsilon' p-\tau} & r_{\xi x} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Damit folgt weiter aus (104)

$$|v(x, y)| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-2+\varepsilon'}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+3q-2-\varepsilon' p-\tau} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{p+3q-2-\varepsilon' p} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p} \end{cases}$$

für alle $x \in T$ und alle $y \in T$ (es ist $\lambda p > \tau$). Dabei wurde ab hier für das Folgende $\lambda > \frac{1}{2}$ angenommen und für $n \geqq 4$ zusätzlich zu den Forderungen an p von Seite 171 noch $\frac{n-4}{n-6+4\lambda} < p < 1$ verlangt. Außerdem sei $\varepsilon' \geqq 1 - \lambda$; da $\lambda < 1$ angenommen werden honnte, ist auch $\varepsilon' < 1$ wählbar. Aus der letzten Ungleichung folgt dann schließlich mit (117)

$$(118) \qquad |G(x, y)| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-2+\varepsilon'}} \begin{cases} |\varkappa|^{2p+q-2-\varepsilon' p} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{p+3q-2-\varepsilon' p} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Nun sind die partiellen Ableitungen von G nach y_i von Interesse. Wir wissen, daß $\frac{\partial}{\partial y_j} v(x, y)$ bezüglich y aus $C^{(0,\lambda)}$ in T für alle $x \in T'$ ist. Man vergleiche hierzu Seite 171. Entsprechend dem Beweis der dort benützten Sätze 4. 24 bis 4. 26 kann man schreiben ([1], S. 34/35):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y_j} = & \int_{\mathfrak{F}T} \frac{\partial}{\partial y_j} \mathfrak{P}_\eta (Q^*(y, \eta) - H(y, \eta)) \, \zeta(\eta, x) \, d\sigma_\eta \\ & + \int_{\mathfrak{F}T} \frac{\partial}{\partial y_j} \mathfrak{P}_\eta (H(y, \eta)) \, (\zeta(\eta, x) - \zeta(y, x)) \, d\sigma_\eta \\ & + \zeta(y, x) \left\{ \int_{\mathfrak{F}T} \frac{\partial}{\partial y_j} H(y, \eta) \, (\beta(\eta) - \sum_p b_p(\eta) \, X_p(\eta)) \, d\sigma_\eta - \int_T \frac{\partial H}{\partial y_j} \mathfrak{M}^*(1) \, d\tau_y \right\}. \end{aligned}$$

Die Abschätzung des ersten und dritten Ausdrucks auf der rechten Seite macht keine Schwierigkeiten. Bei dem mittleren Term ist zu beachten, daß $\zeta(\eta, x)$ bezüglich η auf $\mathfrak{F}T$ für $x \in T'$ eine H-Bedingung zum Exponenten μ erfüllt, $\mu > 1 - \lambda$. Da auch $\lambda > \mu > 0$ benötigt wird, brauchen wir auch hier die Voraussetzung $\lambda > \frac{1}{2}$. Dann findet man für alle x, y aus T

$$\left|\frac{\partial v(x, y)}{\partial y_j}\right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^{2(p+q-1)-p\lambda} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{3p+2q-2-\varepsilon' p-\tau} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p} \end{cases}$$

und damit

$$\left|\frac{\partial G(x, y)}{\partial y_j}\right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-1} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{3p+2q-2-\varepsilon' p-\tau} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases} \tag{119}$$

Dabei war noch $p > \dfrac{3n+4}{3n+6-2\lambda}$ und $\varepsilon' > \lambda$ vorausgesetzt worden. Es ist übrigens $\dfrac{3n+4}{3n+6-2\lambda} > \dfrac{2}{3-\lambda}$. Ferner wurde nur im Fall $n = 3$ die Voraussetzung $\varepsilon' < \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2p} < 1$ benötigt.

In entsprechender Weise läßt sich G' abschätzen. Man erhält ganz ähnliche Resultate:

$$|G'(x, y)| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-2+\varepsilon'}} \begin{cases} |\varkappa|^{2p+q-2-\varepsilon' p} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{2p+2q-3} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p} \end{cases} \tag{118'}$$

und

$$\left|\frac{\partial G'(x, y)}{\partial y_j}\right| \leqq \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-1} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{3p+3q-3-p\lambda} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases} \tag{119'}$$

Es gelten also alle voranstehenden Ungleichungen für $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa^*$.

Zusammenfassend ist also p gemäß der Bedingung

$$\operatorname{Max}\left(\frac{n+4}{n+5}, \frac{n}{n+\lambda}, \frac{3n+4}{3n+6-2\lambda}, \frac{n+2+\varepsilon}{n+3}, a\right) < p < 1 \tag{120}$$

zu wählen (man vgl. S. 162 und 171). Dabei ist $a = 0$ für $n = 3$ und $a = \dfrac{n-4}{n-6+4\lambda}$ für $n \geqq 4$. Ferner ist $\varepsilon' \geqq 1 - \lambda$ (vgl. (118)) bzw. $\varepsilon' > \lambda$, $\varepsilon' < \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2p}$ für $n = 3$ (vgl. (119)) angenommen worden.

§ 11. Die Randwertaufgaben für die Gleichung (79).

Wir betrachten jetzt die erste und die zweite Randwertaufgabe für unsere elliptische partielle Differentialgleichung

$$\mathfrak{M}_x(u) + \sum_j B_j(x)\, u_{x_j}(x) + (A(x) - \varkappa^2 h(x))\, u(x) = D(x), \tag{79}$$

wobei die Koeffizienten die Voraussetzungen von Seite 158 erfüllen. Ferner sei $\lambda > \frac{1}{2}$ und $n \geqq 3$. Wir nehmen an, daß (79) in $T - \mathfrak{F}T$ eine reguläre Lösung besitzt, die stetig ist und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in T hat, sowie der Bedingung

$$u(x) = \varphi(x) \text{ für } x \in \mathfrak{F}T \text{ mit } \varphi \in C^{(0)} \text{ auf } \mathfrak{F}T$$

genügt. Dann folgt durch Anwendung des Satzes 8. 1, wenn man dort für $Q^*(y, x)$ die Greensche Funktion $Q^*(y, x) = G(x, y)$ (man vgl. (110)) einsetzt, was wegen der Eigenschaften von G, Satz 9. 3, möglich ist:

$$(121)\quad u(x) = \int_T K(x, y; \varkappa)\, u(y)\, d\tau_y - \int_T G(x, y)\, D(y)\, d\tau_y - \int_{\mathfrak{F}T} \varphi(y)\, \mathfrak{Q}_y G(x, y)\, d\sigma_y$$

mit

$$(122)\quad K(x, y; \varkappa) = G(x, y)\left(A(y) - \sum_j \frac{\partial B_j}{\partial y_j}\right) - \sum_j B_j(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial y_j}.$$

Läßt man jetzt x gegen ξ auf $\mathfrak{F}T$ streben, nachdem vorher der Gaußsche Satz im ersten Integral angewendet wurde, so ist mit 4. 8 und der Bemerkung bei (110) der Limes der ersten beiden Integrale gleich Null. Das letzte Integral ist ein Potential der Doppelschicht, und es kann 4. 24 angewendet werden, denn dieser Satz gilt genauso, wenn man den Operator $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{Q}$ ersetzt. Damit hat man für $x \to \xi$ aus (121)

$$(123)\quad \varphi(\xi) + 2 \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{Q}_y (G(\xi, y))\, \varphi(y)\, d\sigma_y = 0.$$

Da nach (26) der Kern aus $N^{(1+\lambda)}$ ist, liegt eine Fredholmsche Integralgleichung vor. Wegen (118) und (119) gilt nach Definition von $\mathfrak{Q}$ (13) (für $r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}$ werde $\varepsilon' = 1 - \lambda$ gesetzt, für $r_{xy} > |\varkappa|^{-p}$ bleibt ε' beliebig):

$$|\mathfrak{Q}_y G(\xi, y)| \leqq \frac{C}{r_{\xi y}^{n-1-\lambda}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-1} & r_{\xi y} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{3p+2q-2-\varepsilon' p-\tau} & r_{\xi y} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Ist jetzt $\sigma_1 = \mathfrak{F}T \cap S(\xi, |\varkappa|^{-p})$ und $\sigma_2 = \mathfrak{F}T - \sigma_1$, so wird

$$\int_{\mathfrak{F}T} |\mathfrak{Q}_y G(\xi, y)|\, d\sigma_y \leqq C \int_{\sigma_1} \frac{|\varkappa|^{p+q-1}}{r_{\xi y}^{n-1-\lambda}}\, d\sigma_y + C \int_{\sigma_2} \frac{|\varkappa|^{3p+2q-2-\varepsilon' p-\tau}}{r_{\xi y}^{n-1-\lambda}}\, d\sigma_y.$$

Im ersten Integral wird σ_1 durch die Projektion auf die Tangentialebene an $\mathfrak{F}T$ in ξ ersetzt und über die entstehende $(n-1)$-dimensionale Hyperkugel integriert. Damit bekommt man dann insgesamt

$$\int_{\mathfrak{F}T} |\mathfrak{Q}_y G(\xi, y)|\, d\sigma_y = O(|\varkappa|^{p+q-1-p\lambda}) + O(|\varkappa|^{3p+2q-2-\varepsilon' p-\tau}).$$

Von dem ersten Exponenten rechnet man sofort nach, daß er negativ ist. Für den zweiten wähle man $\varepsilon' > 1 - \lambda$ und dann $p > \dfrac{2n}{2n + \lambda + \varepsilon' - 1}$ zusätzlich zu (120). Damit wird für $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \tilde{\varkappa}$ obiger Ausdruck kleiner als $\frac{1}{2}$. Dies reicht aber hin für die Behauptung, daß die Neumannsche Reihe für den Kern von (123) konvergiert und somit $\varphi \equiv 0$ sein muß (man sehe etwa [1], S. 44).

Da wir von den Voraussetzungen (80) über die Koeffizienten A, B, D keinen Gebrauch gemacht haben, können wir behaupten:

11. 1. *Es gibt eine Zahl $\tilde{\varkappa} > 0$, so daß für alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \tilde{\varkappa}$, $\varkappa \notin S_1 \cup S_2$ die erste Randwertaufgabe für die Differentialgleichung* (79) *— gleichgültig, ob die Voraussetzungen* (80) *erfüllt sind oder nicht — mit den stetigen Randwerten φ, die nicht identisch gleich Null sind, unlösbar ist.*

Es sei jetzt $\varphi \equiv 0$ in (121). Dann gilt für den Kern dieser Integralgleichung mit (118), (119) und (80)

$$|K(x, y; \varkappa)| \leqq |\varkappa|^{\bar{\varepsilon}} \left[\frac{C}{r_{xy}^{n-2+\varepsilon'}} \begin{cases} |\varkappa|^{2p+q-1-\varepsilon' p} \\ |\varkappa|^{3p+2q-2-\varepsilon' p-\tau} \end{cases} + \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-1} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{3p+2q-2-\varepsilon' p-\tau} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}, \end{cases} \right]$$

wobei $\bar{\varepsilon} = \operatorname{Max}(\alpha - 1, \beta, \beta' - 1) < 1$ bedeutet. Man bildet auch hier $\int_T |K(x, y; \varkappa)|\, d\tau_y$, indem man

$$T = S(x; |\varkappa|^{-p}) \cup T - S(x; |\varkappa|^{-p})$$

setzt und findet dann

$$\int_T |K(x, y; \varkappa)|\, d\tau_y = O(|\varkappa|^{q-1+\bar{\varepsilon}}) + O(|\varkappa|^{3p+2q-2-\varepsilon' p-\tau+\bar{\varepsilon}}).$$

Der erste Exponent ist negativ (man vgl. Seite 162). Der zweite Exponent wird negativ, wenn $p > \dfrac{2n+\bar{\varepsilon}}{2n-1+\lambda+\bar{\varepsilon}}$ ist; das ist für $n \geqq 4$ realisierbar, falls $\bar{\varepsilon} < \lambda$ ist; denn dann kann $\varepsilon' < 1$ so gewählt werden, daß $\bar{\varepsilon} - \lambda + 1 < \varepsilon'$ gilt. Im Fall $n = 3$ ist zu beachten, daß $\varepsilon' < \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2p}$ benützt wurde (man vgl. S. 174). Um auch dann noch $\bar{\varepsilon} - \lambda + 1 < \varepsilon'$ zu erreichen, ist es hinreichend, $\bar{\varepsilon} - \lambda + 1 < \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2p}$ zu realisieren. Dies wiederum wird erfüllt sein, wenn p durch die kleinere Zahl $\dfrac{3n+4}{3n+6-2\lambda}$ (man vgl. (120)) für $n = 3$ ersetzt wird. Folglich reicht es hin,

$$\bar{\varepsilon} < -1 + \lambda + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{15 - 2\lambda}{13} = \frac{14\lambda - 1}{13}$$

anzunehmen. Dann läßt sich ε' wie gewünscht wählen, und es kann $\tilde{\tilde{\varkappa}} > 0$ gefunden werden, so daß das obige Integral für $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \tilde{\tilde{\varkappa}}$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

11. 2. *Ist $\bar{\varepsilon} < \lambda$ für $n \geqq 4$ bzw. $\bar{\varepsilon} < \dfrac{14\lambda - 1}{13}$ für $n = 3$, so gibt es eine Zahl $\tilde{\tilde{\varkappa}} > 0$, so daß für alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \tilde{\tilde{\varkappa}}$, $\varkappa \notin S_1 \cup S_2$, die erste Randwertaufgabe für* (79) *mit den Voraussetzungen* (80) *nur dann lösbar ist, wenn $\varphi \equiv 0$ ist. Dann gibt es auch nur eine einzige Lösung. Sie reduziert sich bei der homogenen Gleichung ($D \equiv 0$) notwendigerweise auf $u \equiv 0$.*

Ist von vornherein $\lambda = 1$, so läßt sich für jedes $\bar{\varepsilon} < 1$ die Voraussetzung des Satzes $\bar{\varepsilon} < \lambda$ für $n \geqq 4$ bzw. $\bar{\varepsilon} < \dfrac{14\lambda - 1}{13}$ für $n = 3$ realisieren.

Wir gehen zur zweiten Randwertaufgabe über und nehmen wieder an, daß (79) eine in $T - \mathfrak{F}T$ reguläre Lösung u hat, die aus $C^{(1)}$ in T ist. Ferner gelte

$$\mathfrak{P}(u) = \varphi(x) \text{ für } x \in \mathfrak{F}T, \quad \varphi \in C^{(0)} \text{ auf } \mathfrak{F}T.$$

Jetzt folgt mit den Überlegungen von Seite 159, wenn man G' für Q^* einsetzt und die Eigenschaften 9. 5 von G' beachtet

$$(124) \quad u(x) = \int_T G'(x, y) \left[A(y)\, u(y) + \sum_j B_j(y) \frac{\partial u}{\partial y_j}\right] d\tau_y - \int_T G'(x, y)\, D(y)\, d\tau_y + \int_{\mathfrak{F}T} G'(x, y)\, \varphi(y)\, d\sigma_y.$$

Bildet man jetzt $\mathfrak{P}_x(u(x))$ und läßt man dann $x \to \xi$ mit $\xi \in \mathfrak{F}T$ konvergieren, so folgt mit 4. 14, nach der Bemerkung im Anschluß an (115) und wegen 4. 22 die Fredholmsche Integralgleichung

$$(125) \qquad \varphi(\xi) - 2 \int_{\mathfrak{F}T} \mathfrak{P}_x G'(\xi, y)\, \varphi(y)\, d\sigma_y = 0.$$

Wie früher findet man aus (118′) und (119′)

$$|\mathfrak{P}_x G'(\xi, y)| \leqq \frac{C}{r_{\xi y}^{n-1-\lambda}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-1} & r_{\xi y} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{3p+3q-3-\lambda p} & r_{\xi y} > |\varkappa|^{-p}. \end{cases}$$

Da $p > \dfrac{3n}{3n+2\lambda}$ ist, wird $3p + 3q - 3 - \lambda p < 0$, und damit folgt wie oben die Existenz einer Resolvente für (125). Also ist $\varphi \equiv 0$.

11. 3. *Es gibt eine Zahl $\varkappa' > 0$, so daß für alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa'$, $\varkappa \notin S_1 \cup S_2$ die zweite Randwertaufgabe für die Differentialgleichung* (79) *— gleichgültig, ob die Voraussetzungen* (80) *erfüllt sind oder nicht — mit den stetigen Randwerten φ für $\mathfrak{P}(u)$, die nicht identisch gleich Null sind, unlösbar ist.*

Ist jetzt $\varphi \equiv 0$ in (124), dann folgt in der üblichen Weise

$$u(x) = \int_T K'(x, y;\, \varkappa)\, u(y)\, d\tau_y + \int_{\mathfrak{F}T} \sum_j B_j(y)\, X_j(y)\, G'(x, y)\, u(y)\, d\sigma_y - w_1(x),$$

wobei K' die Bedeutung von (122) nach Ersetzung von G durch G' hat und

$$w_1(x) = \int_T G'(x, y)\, D(y)\, d\tau_y$$

ist. Wir bezeichnen mit $v(\xi)$ die Randwerte von u auf $\mathfrak{F}T$. Dann erhält man, wenn man $x \to \xi \in \mathfrak{F}T$ streben läßt, mit obiger Relation ein System von Integralgleichungen für $u(x)$ und $v(\xi)$:

$$(126)\qquad \begin{aligned} u(x) - \int_T K'(x, y)\, u(y)\, d\tau_y - \int_{\mathfrak{F}T} L(x, y)\, v(y)\, d\sigma_y &= w_1(x), \\ v(\xi) - \int_T K'(\xi, y)\, u(y)\, d\tau_y - \int_{\mathfrak{F}T} L(\xi, y)\, v(y)\, d\sigma_y &= w_1(\xi). \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Stetigkeit von Raumpotential und Potential der einfachen Schicht in T benutzt (4. 20). Ferner wurde

$$L(x, y) = \sum_j B_j(y)\, X_j(y)\, G'(x, y)$$

gesetzt. Da $K' \in N^{(1)}$ und $L \in N^{(2)}$ gilt, ist auf das System die Fredholmsche Theorie anwendbar (man vgl. [1], S. 43, 17. II). Das System hat eine Resolvente für

$$M = 2\left(\operatorname*{Max}_{x \in T} \int_T |K'(x, y;\, \varkappa)|\, d\tau_y + \operatorname*{Max}_{\xi \in T} \int_{\mathfrak{F}T} |L(\xi, y)|\, d\sigma_y\right) < 1.$$

Man vergleiche hierzu [1], S. 44, 17, V. Nun ist aber nach (118′) und (119′)

$$|K'(x, y;\, \varkappa)| \leqq |\varkappa|^{\bar\varepsilon} \left[\frac{C}{r_{xy}^{n-2+\varepsilon'}} \begin{cases} |\varkappa|^{2p+q-1-\varepsilon' p} \\ |\varkappa|^{2p+2q-2} \end{cases} + \frac{C}{r_{xy}^{n-1}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-1} \\ |\varkappa|^{3p+3q-3-\varepsilon p} \end{cases} \right] \begin{matrix} r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ r_{xy} > |\varkappa|^{-p}. \end{matrix}$$

Damit folgt wie früher

$$\left| \int_T K'(x, y;\, \varkappa)\, d\tau_y \right| = O(|\varkappa|^{q-1+\bar\varepsilon}) + O(|\varkappa|^{2p+2q-2+\bar\varepsilon}).$$

Der erste Exponent ist negativ. Der zweite nur, falls $p < 1$ und $p > \dfrac{n+\bar\varepsilon}{n}$ gewählt werden kann. Dies läßt sich jedoch nur für $\bar\varepsilon < 0$ ermöglichen. Dann muß $\beta < 0$ sein. Schließlich wird mit (118′)

$$|L(x, y)| \leqq |\varkappa|^{\beta} \frac{C}{r_{xy}^{n-1-\lambda}} \begin{cases} |\varkappa|^{p+q-2+\varepsilon p} & r_{xy} \leqq |\varkappa|^{-p}, \\ |\varkappa|^{p+2q-3+\varepsilon' p+\lambda p} & r_{xy} > |\varkappa|^{-p}, \end{cases}$$

und somit wegen $\beta < 0$

$$\int_{\mathfrak{F}T} |L(x, y)|\, d\sigma_y = O(|\varkappa|^{p+q-2+\lambda p}).$$

Denn für $p > \frac{n+1}{n+2-\varepsilon'}$ ist der obere Exponent der größere und für $p > \frac{n-2}{n-2\lambda}$ wird er negativ. Ist also $\bar{\varepsilon} < 0$, so gibt es eine Zahl $\varkappa'' > 0$, so daß für alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa''$ das System (126) genau eine Lösung hat. Sie lautet ([1], S. 41):

$$u(x) = \int_T \Gamma_{11}(x, y)\, w_1(y)\, d\tau_y + \int_{\mathfrak{F}T} \Gamma_{12}(x, \eta)\, w_1(\eta)\, d\sigma_\eta + w_1(x), \quad x \in T,$$

$$v(\xi) = \int_T \Gamma_{21}(\xi, y)\, w_1(y)\, d\tau_y + \int_{\mathfrak{F}T} \Gamma_{22}(\xi, \eta)\, w_2(\eta)\, d\sigma_\eta + w_1(\xi), \quad \xi \in \mathfrak{F}T.$$

Hierbei sind $v(\xi)$ die Randwerte von $u(x)$. Damit haben wir den Satz:

11. 4. *Ist $\bar{\varepsilon} < 0$, d. h. $\alpha < 1$, $\beta < 0$, $\beta' < 1$, so gibt es eine Zahl $\varkappa'' > 0$, so daß für alle $\varkappa$ mit $|\varkappa| > \varkappa''$, $\varkappa \notin S_1 \cup S_2$, die zweite Randwertaufgabe für* (79) *nur dann lösbar ist, wenn $\varphi \equiv 0$ ist. Dann gibt es genau eine Lösung. Sie reduziert sich auf $u \equiv 0$, wenn die Gleichung* (79) *homogen ist.*

Literatur.

[1] *C. Miranda*, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, Berlin 1955.

[2] *G. Giraud*, Équations a intégrales principales, Ann. Éc. N. Sup. **51** (1934), 251—372.

[3] *G. Giraud*, Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes, Ann. Éc. N. Sup. **49** (1932), 1—104.

[4] *T. Carleman*, Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen, Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig **88** (1936), 119—132.

[5] *W. Sternberg*, Über die lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung, M. Z. **21** (1924).

[6] *W. Sternberg*, Über die asymptotische Integration partieller Differentialgleichungen mit Parameter, Math. Ann. **86** (1922).

[7] *E. Levi*, Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, Rend. Circ. Mat. Palermo **24** (1907), 275—317.

[8] *A. Hammerstein*, Über die asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen linearer Integralgleichungen II, Math. Ann. **95** (1925), 102—109.

[9] *F. Kamke*, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. I. Leipzig 1951.

[10] *W. Magnus, F. Oberhettinger*, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin 1948.

Eingegangen 9. März 1960.

Dirichletsche Reihen und Momentprobleme.

Herrn Geheimrat Prof. Dr. O. Perron zum 80. Geburtstag.

Von *N. Stuloff* in Mainz.

Die Frage nach der Entwickelbarkeit von Funktionen einer reellen Variablen in absolut konvergente Dirichletsche Reihen der Form $\sum a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma}$, $\lambda_\nu > 0$, a_ν reell, $\sigma \geqq 0$, wurde vom Verf. in drei voraufgegangenen Aufsätzen, die wir im folgenden als Note I [1]), II [2]) und III [3]) zitieren werden, untersucht, ausgehend von der bekannten Tatsache, daß ja eine solche Reihe sich als Stieltjessches Momentintegral schreiben läßt,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma} = \int_0^\infty e^{-\sigma u} d\theta(u),$$

mit einer (im allgemeinen) in $(0, \infty)$ schwankungsbeschränkten Belegungsfunktion $\theta(u)$. Für das Folgende heben wir noch hervor, daß diese Belegungsfunktion durch fortlaufende Summation der Koeffizienten a_ν, die die Sprunggrößen bilden, entsteht (d. h. eine *Sprungfunktion* ist); deren Sprungstellen sind dann die Exponenten λ_ν der Dirichletschen Reihe. Umgekehrt ist das Momentintegral jeder solchen Belegung gleich einer Dirichletschen Reihe, deren Koeffizienten gleich den Sprunggrößen und deren Exponenten gleich den Sprungstellen von $\theta(u)$ sind (vgl. hierzu auch die Ausführungen in Note I und Note II).

Weiter ging durch gewisse Zusatzbedingungen das Integral in die Reihe über. Die damit gewonnenen Ergebnisse stützten sich also auf ein vom Dirichletreihenproblem unabhängiges Kennzeichen für die Darstellbarkeit einer reellen, beliebig oft differenzierbaren Funktion als konvergentes Stieltjessches Momentintegral

$$f(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} d\chi(u), \quad \sigma > c, \tag{1}$$

d. h. auf das *Momentproblem.*

Da die hierfür bekannten allgemeinen Kriterien für den vorliegenden Zweck wenig durchsichtig sind, war es naheliegend, geeignete Spezialfälle zu betrachten. So lieferte im Falle einer monotonen Belegungsfunktion der Bernsteinsche Satz [4]) als notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit (1) einer reellen Funktion die *totale Monotonie* dieser Funktion (im Hausdorffschen Sinne), d. h. $(-1)^n f^{(n)}(\sigma) \geqq 0$, $\sigma > c$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Diesem Falle entsprechen die Dirichletschen Reihen mit positiven Koeffizienten, die in Note I und III behandelt wurden. Die gegenüber den Ergebnissen der Note I einfacheren Sätze der Note III entstanden durch eine Spezialisierung: In I war von der Exponentenmenge $\{\lambda_\nu\}$ nebst $\lambda_\nu > 0$ lediglich deren Abzählbarkeit (eine

[1]) *N. Stuloff*, Über die Entwickelbarkeit von Funktionen in verallgemeinerte Dirichletsche Reihen. Math. Z. **53** (1950), 273—284.

[2]) *N. Stuloff*, Absolut konvergente verallgemeinerte Dirichletsche Reihen im Reellen. Math. Z. **54** (1951), 329—338.

[3]) *N. Stuloff*, Ein Beitrag zur Theorie spezieller Dirichletscher Reihen. Math. Z. **59** (1954), 339—355.

[4]) *S. Bernstein*, Sur les fonctions absolument monotones. Acta Math. **51** (1928), 1—66.

von H. Bohr im Rahmen der Theorie der fastperiodischen Funktion eingeführte Verallgemeinerung des klassischen Dirichletentwicklungsproblems) gefordert, während in III diese Menge, z. T. wieder dem klassischen Falle näher kommend, keine Häufungspunkte im Innern von $(0, \infty)$ haben durfte. Note II behandelte den allgemeinen Fall von Dirichletreihen mit Koeffizienten beliebigen Vorzeichens und beliebig abzählbarer Exponentenmenge, basierend auf einem Hausdorffschen Satz für die Darstellbarkeit (1)[5]).

Die vorliegende Schrift greift diesen Gedanken auf mit dem Ziele, wieder durch geeignete Spezialisierungen einfachere Sätze gegenüber den Ergebnissen der Note II zu beweisen und zwar über Dirichletsche Reihen mit Koeffizienten *beliebigen Vorzeichens*. Über die bereits erwähnte Spezialisierung betreffs der Häufungspunkte der Exponentenmenge hinaus verlangen wir nun auch noch eine besondere Wachstumseigenschaft derselben, nämlich, daß es zu einer solchen vorgegebenen Menge $\{\lambda_\nu\}$, $\lambda_\nu > 0$, eine Zahl $\delta' \geqq 0$ geben soll derart, daß die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\lambda_\nu \delta}$ für jedes $\delta > \delta'$ konvergiert. Ersichtlich schließt diese Forderung die voraufgehende ein, denn nun können sich die λ_ν sicher nicht im Endlichen häufen. Hierin sind z. B. auch die für zahlentheoretische Fragen bedeutungsvollen gewöhnlichen Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_\nu}{\nu^\sigma}$ mit $\lambda_\nu = \lg \nu$ und $\delta' = 1$ enthalten. Unser Entwicklungsproblem lautet also, bei vorgegebener Exponentenfolge (λ_ν), die den soeben genannten Bedingungen genügt, notwendige und hinreichende Bedingungen für eine für $\sigma > \sigma'$ definierte und dort beliebig oft differenzierbare reelle Funktion $f(\sigma)$ zu finden, so daß für diese die Darstellung

$$f(\sigma) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma} \tag{2}$$

gilt, wobei die Dirichletsche Reihe oberhalb eines gewissen σ_0 *absolut konvergiert*. Die Entwicklungskoeffizienten sind sodann aus der Funktion mit Hilfe eines entsprechenden Kalküls zu bestimmen.

In § 1 wird vorbereitend ein Satz über das allgemeine Momentproblem bewiesen, der dann später seine Anwendung auf Dirichletreihen findet. § 2 enthält den Entwicklungssatz, wobei es sich erweist, daß nun auf Grund der erwähnten Einschränkung bezüglich der Exponentenfolge eine einzige Bedingung genügt, aus welcher man sowohl auf die Darstellbarkeit (1) als Momentintegral als später auch darauf, daß es sich dabei speziell um eine Dirichletreihe (2) handelt, schließen kann. In § 3 wird ein wichtiger Spezialfall behandelt, bei dem in der oben genannten Exponentenbedingung $\delta' = 0$ ist, und ferner die Formel zur Ermittlung der Koeffizienten angegeben.

§ 1.

Es sei $f(\sigma)$ für $\sigma > c$ definiert und daselbst beliebig oft differenzierbar. Entsprechend den in der Einleitung gemachten Ausführungen fragen wir nun nach den zusätzlichen Eigenschaften einer solchen Funktion für deren Darstellung in Form (1). Hierfür gibt es in der Literatur[6]) verschiedene Kriterien; wir wollen hier jedoch einen weiteren, für das folgende zweckmäßigen und sehr einfach zu beweisenden Satz formulieren:

---

[5]) In den genannten Noten I, II, III wurde das Hausdorffsche Momentproblem, d. h. das Integrationsintervall $[0, 1]$ zugrunde gelegt. Dieses geht aber durch eine einfache Substitution sofort in das obige über.

[6]) Vgl. *F. Hausdorff*, Summationsmethoden und Momentfolgen. Math. Z. **9** (1921), 74—109, 280—299. — *F. Hausdorff*, Momentprobleme für ein endliches Intervall. Math. Z. **16** (1923), 220—248. — *D. V. Widder*, The Inversion of the Laplace Integral and the related Moment Problem. Trans. Am. Math. Soc. **36** (1934), 107—200. — *D. V. Widder*, The Laplace Transform. Princeton University Press (1946), insbes. 299—306. U. a. m.

Satz 1. *Damit für $f(\sigma)$ die Darstellung*

$$(1) \qquad f(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} d\chi(u)$$

gelte, wo das Integral für $\sigma > c$ absolut konvergiert und $\chi(u)$ in jedem endlichen Teilintervall von $(0, \infty)$ von beschränkter Variation ist, ist notwendig und hinreichend, daß eine totalmonotone Funktion $t(\sigma)$ existiert (d. h. $(-1)^n t^{(n)}(\sigma) \geqq 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $\sigma > c$), derart, daß

$$(3) \qquad (-1)^n f^{(n)}(\sigma) \leqq (-1)^n t^{(n)}(\sigma)$$

für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ und alle $\sigma > c$ ist.

Beweis. Es möge $t(\sigma)$ existieren und für $f(\sigma)$ die Beziehung (3) gelten, die sich dann in der Form

$$(-1)^n t^{(n)}(\sigma) - (-1)^n f^{(n)}(\sigma) = (-1)^n T^{(n)}(\sigma) \geqq 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \ \sigma > c,$$

schreiben läßt, wo $T(\sigma)$ durch

$$T(\sigma) = t(\sigma) - f(\sigma), \qquad \sigma > c,$$

definiert und ersichtlich totalmonoton ist. Damit wird aber weiter

$$(4) \qquad f(\sigma) = t(\sigma) - T(\sigma), \qquad \sigma > c,$$

also ist $f(\sigma)$ die Differenz zweier totalmonotoner Funktionen. Auf Grund des in der Einleitung erwähnten Bernsteinschen Satzes gilt nun die Darstellung

$$(4') \qquad f(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} dV(u) - \int_0^\infty e^{-\sigma u} dW(u) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} d\chi(u), \qquad \sigma > c,$$

mit zwei in $(0, \infty)$ monotonen (nicht abnehmenden) Funktionen $V(u)$ und $W(u)$, deren Differenz $\chi(u)$ also in jedem endlichen Teilintervall von $(0, \infty)$ von beschränkter Variation ist. Es gilt also (1) mit einem für $\sigma > c$ absolut konvergenten Integral[7]). In ähnlicher Weise ergibt sich auch die Umkehrung: Gilt für $f(\sigma)$ die Beziehung (1), dann ist $f(\sigma)$ die Differenz zweier totalmonotoner Funktionen[7]). Folglich gibt es ein Paar $T(\sigma)$, $t(\sigma)$ mit der Gültigkeit von (4) und man kommt, dieselben Schritte rückwärts verfolgend, auf den Ausdruck (3), womit die Existenz der totalmonotonen Funktion $t(\sigma)$ gezeigt und der Satz bewiesen ist.

Dieser Satz gestattet es also, die Eigenschaft (1) auf die totale Monotonie einer Funktion zurückzuführen, deren Existenz zu zeigen ist. Das gelingt in der Tat bei einer Anwendung im folgenden § 2.

§ 2.

Bei dem in diesem Paragraphen zu behandelnden Entwicklungssatz handelt es sich stets um Dirichletsche Reihen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma},$$

die in einem gewissen Bereich *absolut konvergieren*, d. h., für die es eine Abszisse der absoluten Konvergenz σ_A mit $-\infty \leqq \sigma_A < +\infty$ gibt. Für die im Entwicklungssatz auftretende Größe σ_0 gilt stets $\sigma_0 \leqq \sigma_A$.

Ferner betrachten wir eine Exponentenfolge (λ_ν) als *vorgegeben* und zwar mit der Eigenschaft, daß $\lambda_\nu > 0$ ist, $\nu = 1, 2, \ldots$, und ferner, daß es eine Zahl $\delta' \geqq 0$ derart gibt, daß die Reihe

$$(5) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\lambda_\nu \delta} \quad \textit{für alle } \delta > \delta' \textit{ konvergiert.}$$

[7]) *D. V. Widder*, Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral. Trans. Am. Math. Soc. **33** (1931), 851—892, insbes. S. 863.

Für eine solche Folge gilt ersichtlich die Monotonieeigenschaft

$$(6) \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \to \infty.$$

Aus (λ_ν) bilden wir nun eine zweite Folge $(\bar{\lambda}_\nu)$ durch

$$(7) \qquad \bar{\lambda}_\nu = \frac{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu}{\lg \dfrac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu}}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

und setzen $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0 = 0$. Es erweist sich leicht, daß auch für $(\bar{\lambda}_\nu)$

$$(6') \qquad 0 < \bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 < \cdots \to \infty$$

gilt und ferner, daß

$$(7') \qquad \lambda_\nu < \bar{\lambda}_\nu < \lambda_{\nu+1}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

ist. Weiter definieren wir eine Funktion $\mu(\varkappa)$ der Variablen $\varkappa$, $0 < \varkappa < \infty$, durch

$$(8) \qquad \mu(\varkappa) = \nu, \text{ wenn } \bar{\lambda}_{\nu-1} < \varkappa \leqq \bar{\lambda}_\nu, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

so daß also $\mu(\varkappa)$ nur positiv-ganzzahliger Werte fähig ist.

Es sei $f(\sigma)$ eine reelle Funktion, zu der es ein σ' gibt derart, daß die folgenden drei Forderungen erfüllt sind:

(9) *$f(\sigma)$ ist in $\sigma' < \sigma < \infty$ definiert und dort beliebig oft differenzierbar,*

(9′) $f(\sigma) \not\equiv 0$,

(9″) $\lim\limits_{\sigma \to \infty} f(\sigma) = 0$.

Unter Berücksichtigung dieser Vorbemerkungen lautet nun

Satz 2. *Eine vorgelegte Funktion $f(\sigma)$ möge den Bedingungen* (9), (9′), (9″) *genügen. Es gibt ein σ_0 mit $-\infty \leqq \sigma_0 < +\infty$ derart, daß*

$$(2) \qquad f(\sigma) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma}$$

mit reellen a_ν, vorgegebener Folge (λ_ν) gemäß (5) *und absoluter Konvergenz für $\sigma > \sigma_0$, dann und nur dann ist, wenn es ein $\delta > \delta'$ gibt, so daß für jedes $\varkappa > 0$*

$$(10) \qquad \left| \left(\frac{e^{\frac{\lambda_{\mu(\varkappa)}}{\varkappa}}}{\lambda_{\mu(\varkappa)}} \right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa} + \delta \right) \right| \leqq C_\delta \quad \textit{ist für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dabei ist $C_\delta < \infty$ nur von δ und der gegebenen Funktion $f(\sigma)$ abhängig.

Zunächst bemerken wir, daß wegen (8) mit $\mu(\varkappa) \in \{\nu\}$ die Beziehung $\lambda_{\mu(\varkappa)} \in \{\lambda_\nu\}$ folgt; es handelt sich also darum, zu einem gewählten $\varkappa$ ein geeignetes Element der Menge $\{\lambda_\nu\}$ zu finden, sodaß (10) befriedigt ist.

Beweis. Die Notwendigkeit obiger Bedingung (10) können wir direkt zeigen, indem wir mit einer durch eine *nicht identisch verschwindende* Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma}$ definierten Funktion $f(\sigma)$ den links in (10) stehenden Ausdruck bilden und die Existenz eines δ im Sinne der Behauptung zeigen. Wir setzen ferner voraus, daß es zu dieser Reihe ein σ_0 gemäß des Satzes gibt, so daß dann mit $\sigma' = \sigma_0$ die Funktion $f(\sigma)$ alles in (9), (9′), (9″) Verlangte leistet. Wir betrachten ferner ein $\varkappa > 0$, und bestimmen gemäß (7) und (8) dazu ein $\mu = \mu(\varkappa)$, womit also ein Index und damit ein λ_μ aus der Menge $\{\lambda_\nu\}$ ausgezeichnet ist. Es gilt demnach

$$(11) \qquad \bar{\lambda}_{\mu-1} < \varkappa \leqq \bar{\lambda}_\mu.$$

Da nun nach Voraussetzung die vorgelegte Reihe in einem gewissen Bereich absolut konvergiert, *wählen* wir nun das δ so, daß neben $\delta > \delta'$ auch $\delta > \sigma_0$ wird, also im Inneren des genannten Bereiches liegt, sonst aber beliebig. Es ist nun zu zeigen, daß dieses δ das in der Behauptung Verlangte leistet. Nach einer Zwischenrechnung geht nun die linke Seite von (10) über in

$$(12) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \delta} \left[\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\mu} \cdot e^{-\frac{\lambda_\nu - \lambda_\mu}{\varkappa}}\right]^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \delta} [\omega(\lambda_\nu, \varkappa)]^n,$$

wo wir den links in der eckigen Klammer stehenden Ausdruck durch $\omega(\lambda_\nu, \varkappa)$ abgekürzt haben.

Wir wollen jetzt einschaltend einige für das Folgende bedeutungsvolle Eigenschaften der Funktion $\omega(u, \varkappa)$ hervorheben, die bei konstantem μ definiert ist durch

$$(13) \qquad \omega(u, \varkappa) = \frac{u}{\lambda_\mu} \cdot e^{-\frac{u - \lambda_\mu}{\varkappa}}, \qquad 0 \leqq u \leqq \infty; \; 0 < \varkappa < \infty.$$

Es zeigt sich leicht, daß ω bei festem $\varkappa$ als Funktion von u allein betrachtet, nur bei $u = \varkappa$ ein Maximum besitzt, sonst aber überall monoton verläuft. Ferner ist

$$(13') \qquad \omega(u, \varkappa) \geqq 0, \qquad \omega(0, \varkappa) = \omega(\infty, \varkappa) = 0.$$

Wir fragen jetzt nach ihrem Verhalten an den Stellen $u = \lambda_{\mu-1}, \lambda_\mu, \lambda_{\mu+1}$, falls $\varkappa$ beliebig im Intervall (11) variiert, wobei ja $\mu = \mu(\varkappa)$ wegen (8) konstant bleibt. Zunächst ist

$$(14) \qquad \omega(\lambda_\mu, \varkappa) = 1 \textit{ für jedes } \varkappa > 0.$$

Setzen wir speziell $\varkappa = \bar{\lambda}_\mu$, dann ergibt eine Zwischenrechnung:

$$(14') \qquad \omega(\lambda_{\mu+1}, \bar{\lambda}_\mu) = 1.$$

Nun wird aber mit abnehmendem $\varkappa$ auch $\omega(\lambda_{\mu+1}, \varkappa)$ kleiner, denn aus (13) ist zu ersehen, daß ω bei festgehaltenem $u = \lambda_{\mu+1}$ dann als Funktion von $\varkappa$ monoton abnimmt, weil mit (6) ja $\lambda_{\mu+1} - \lambda_\mu > 0$ ist. Also hat mit (11) diese Funktion ihren größten Wert bei $\varkappa = \bar{\lambda}_\mu$ und es gilt mit (14')

$$(15) \qquad \omega(\lambda_{\mu+1}, \varkappa) \leqq 1, \qquad \varkappa \in (\bar{\lambda}_{\mu-1}, \bar{\lambda}_\mu].$$

Eine ganz analoge Überlegung zeigt für solche $\varkappa$, daß mit $\varkappa \to \bar{\lambda}_{\mu-1}$ auch $\omega(\lambda_{\mu-1}, \varkappa) \to 1$ strebt, so daß nun aber aus $\lambda_{\mu-1} - \lambda_\mu < 0$ folgt:

$$(15') \qquad \omega(\lambda_{\mu-1}, \varkappa) < 1, \qquad \varkappa \in (\bar{\lambda}_{\mu-1}, \bar{\lambda}_\mu].$$

Erst recht gilt dann auf Grund des oben geschilderten Gesamtverlaufes (13') von ω

$$(15'') \qquad \omega(\lambda_\nu, \varkappa) \leqq 1, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \quad \varkappa \in (\bar{\lambda}_{\mu-1}, \bar{\lambda}_\mu].$$

Kehren wir nun zur Formel (12) zurück und halten ein $\varkappa > 0$ fest, so können wir mit Hilfe von (15'') den hinter dem Summenzeichen stehenden Ausdruck wie folgt abschätzen:

$$(16) \qquad \left| a_\nu e^{-\lambda_\nu \delta} [\omega(\lambda_\nu, \varkappa)]^n \right| \leqq \left| a_\nu e^{-\lambda_\nu \delta} \right|, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

wobei der rechter Hand stehende Ausdruck von n und von $\varkappa$ unabhängig ist. Nun stellt dieser aber das *allgemeine Glied* einer, (auf Grund der Wahl von δ) *absolut konvergenten Reihe* dar. Das besagt aber weiter, daß die Reihe in (12) gleichmäßig in $n = 0, 1, 2, \ldots$ und in $0 < \varkappa < \infty$ konvergiert, da ja die durchgeführten Betrachtungen ersichtlich für jedes $\varkappa > 0$ gelten. Daher läßt sich (12) durch eine *nur von der Wahl des δ abhängige Zahl C_δ* majorisieren, so daß das vorhin gewählte δ das in der Behauptung Verlangte leistet, womit auch letztere bewiesen ist.

Wir zeigen jetzt, daß umgekehrt aus (10) die Gültigkeit von (2) folgt, wenn $f(\sigma)$ eine Funktion des in (9), (9′), (9″) erklärten Funktionenraumes ist. Der Beweis vollzieht sich in zwei Schritten, deren erster darin besteht, aus (10) die Darstellbarkeit (1) für $f(\sigma)$ darzutun, d. h. also, das *Momentproblem* zu lösen. Dazu schreiben wir die Voraussetzung in der Form

$$(10') \qquad \left| f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}+\delta\right)\right| \leqq C_\delta(\lambda_\mu)^n e^{-\lambda_\mu \frac{n}{\varkappa}}, \qquad \varkappa > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Wenn nun $\varkappa$ *sämtliche Werte* von $(0, \infty)$ durchläuft, dann durchläuft μ sämtliche natürlichen Zahlen und λ_μ *sämtliche Elemente* der vorgegebenen Menge $\{\lambda_\nu\}$, wie aus (6′) und (8) sofort zu ersehen ist. Wird also die rechte Seite von (10′) für alle $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ aufsummiert, so entsteht

$$(17) \qquad \left| f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}+\delta\right)\right| \leqq C_\delta(\lambda_1)^n \cdot e^{-\lambda_1 \frac{n}{\varkappa}} + C_\delta(\lambda_2)^n \cdot e^{-\lambda_2 \frac{n}{\varkappa}} + \cdots$$

$$= C_\delta \sum_{\mu=1}^{\infty} (\lambda_\mu)^n e^{-\lambda_\mu \frac{n}{\varkappa}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, C_\delta > 0,$$

eine Beziehung, die nun *für alle* $0 < \varkappa < \infty$ *gleichzeitig* gilt; denn die rechts stehenden Glieder sind alle *positiv*.

Wir zeigen jetzt die Konvergenz dieser unendlichen Reihe für $\frac{n}{\varkappa} > \delta$. Ersetzen wir daselbst $\frac{n}{\varkappa}$ durch σ und betrachten die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} (\lambda_\mu)^n e^{-\lambda_\mu \sigma}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \sigma > \delta,$$

so ist ersichtlich die hierdurch dargestellte Funktion bis auf den Faktor $(-1)^n$ die n-te Ableitung der durch

$$(18) \qquad \Phi(\sigma) = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\lambda_\nu \sigma} + \frac{B_\delta}{C_\delta}, \qquad \sigma > \delta,$$

definierten Funktion, wo $B_\delta > 0$ eine obere Schranke für $|f(\sigma)|$ in $\delta < \sigma < \infty$ bedeutet, die ja wegen (9), (9″) sicher vorhanden ist ($\sigma' \leqq \delta$). Die Reihe (18) konvergiert für alle $\sigma > \delta > \delta'$ infolge der vorausgesetzten Eigenschaften (5) der vorgegebenen Exponentenfolge (λ_ν), wo $\delta' \geqq 0$ ist. Damit ist aber auch die Reihe

$$(18') \qquad \Phi^{(n)}(\sigma) = (-1)^n \sum_{\mu=1}^{\infty} (\lambda_\nu)^n e^{-\lambda_\mu \sigma}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

die durch n-fache Differentiation von (18) entsteht, wie aus der bekannten Theorie der Dirichletschen Reihen sofort zu entnehmen ist, ebenfalls für $\sigma > \delta$ konvergent. Zu einem beliebigen Wertepaar σ, n mit $\sigma > \delta$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$ läßt sich aber stets ein $\varkappa > 0$ aus $\varkappa = \frac{n}{\sigma}$ bestimmen, da ja $\sigma \neq 0$ ist, so daß man mit $\sigma = \frac{n}{\varkappa}$ von (18′) auf die Reihe rechts in (17) kommt. Die Reihe in (17) ist also bis auf den Faktor $(-1)^n \cdot C_\delta$ die n-Ableitung der Funktion (18) an der Stelle $\frac{n}{\varkappa}$; sie konvergiert damit für alle $\frac{n}{\varkappa} > \delta$, so daß also $n \neq 0$ zu setzen ist.

Mit den eingeführten Bezeichnungen wird nun aus (17)

$$\left| f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}+\delta\right)\right| \leqq C_\delta(-1)^n \Phi^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots; \ \frac{n}{\varkappa} > \delta.$$

Wenn wir links die Betragstriche fortlassen und den Faktor $(-1)^n$ hinzufügen, was ja beides die linke Seite sicher nicht vergrößert, und wiederum $\frac{n}{\varkappa}$ durch σ ersetzen, dann entsteht

$$(19) \qquad (-1)^n f^{(n)}(\sigma + \delta) \leqq (-1)^n C_\delta \Phi^{(n)}(\sigma), \qquad n = 1, 2, \ldots, \sigma > \delta,$$

wo wir σ und n als *voneinander unabhängig* betrachten können; denn gemäß den obigen Ausführungen läßt sich stets ein $\varkappa > 0$ so bestimmen, daß (19) aus (17) hervorgeht. Darüber hinaus gilt (19) aber auch für $n = 0$. Denn gemäß (9), (9″) ist die Funktion $f(\sigma)$ für $\sigma > \delta \geqq \sigma'$ beschränkt, so daß mit der obigen Bezeichnung gilt

$$f(\sigma + \delta) \leqq B_\delta, \quad \sigma > 0, \qquad 0 < B_\delta < \infty.$$

Erst recht ist also, wenn wir in (19) mit $n = 0$ die Definition (18) einsetzen:

$$f(\sigma + \delta) \leqq C_\delta \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\lambda_\nu \sigma} + B_\delta, \quad \sigma > \delta,$$

womit die Gültigkeit von (19) für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ dargetan ist.

Nun ist aber, wie aus (18) sofort zu ersehen ist, $\Phi(\sigma)$ und damit $C_\delta \cdot \Phi(\sigma)$ eine für $\sigma > \delta$ *totalmonotone* Funktion, denn es ist ja

$$(20) \qquad (-1)^n \cdot C_\delta \cdot \Phi^{(n)}(\sigma) \geqq 0, \quad \sigma > \delta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Damit sind wir jetzt in der Lage, den Satz 1 des § 1 anzuwenden; denn mit (19) ist die dortige Voraussetzung (3) vollauf erfüllt. Demnach gibt es also eine Funktion $\chi(u)$, $0 \leqq u < \infty$, die in jedem endlichen Teilintervall von $(0, \infty)$ von *beschränkter Variation* ist derart, daß für $f(\sigma + \delta)$ die Darstellung

$$(1') \qquad f(\sigma + \delta) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} d\chi(u), \quad \textit{absolut konvergent für } \sigma > \delta,$$

besteht. Damit ist aber das Momentproblem gelöst.

Ersichtlich ist die Belegungsfunktion $\chi(u) = \chi_\delta(u)$ von δ abhängig; da aber δ eine auf Grund der Voraussetzung für das folgende feste Zahl ist, wollen wir dieses nicht weiter hervorheben. Wie aus der Theorie der Stieltjesschen Integrale und Momentprobleme bekannt ist, ist mit (1′) die Belegungsfunktion $\chi(u)$ eindeutig festgelegt, wenn man die übliche Normierung,

$$\chi(0) = 0 \text{ und } \chi(u) = \chi(u + 0), \quad 0 < u < \infty,$$

die ja ohne Einfluß auf den Wert des Integrales ist, hinzunimmt. Ferner ist $\chi(u)$ im Punkte $u = 0$ stetig, was aus (9″) unschwer entnommen werden kann. Durch (9″) ist nämlich eine additive Konstante von $f(\sigma)$ aus Gründen der Bequemlichkeit ausgeschaltet worden, die einem Sprung von $\chi(u)$ bei $u = 0$ entsprechen würde, wie aus der Definition des Stieltjesschen Integrals sofort folgt.

Ferner besagt Formel (4) des § 1, daß $f(\sigma)$ die Differenz zweier totalmonotoner Funktionen ist, insbesondere lehren die dortigen Überlegungen, daß es *genau eine totalmonotone Funktion gibt* — die wir mit $\Psi(\sigma)$, $\delta < \sigma < \infty$, bezeichnen wollen — mit der Eigenschaft

$$(21) \qquad f(\sigma + \delta) = C_\delta \cdot \Phi(\sigma) - \Psi(\sigma), \; \sigma > \delta,$$

wo also

$$(22) \qquad (-1)^n \Psi(\sigma) \geqq 0, \quad \sigma > \delta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ist. Nach dem in der Einleitung erwähnten Bernsteinschen Satz gibt es zwei in $(0, \infty)$ definierte und daselbst *monotone* (*nicht abnehmende*) Funktionen $V(u)$ und $W(u)$, so daß für $\Phi(\sigma)$ und $\Psi(\sigma)$ die Darstellungen

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} dV(u) \tag{23}$$

und

$$\Psi(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} dW(u) \tag{24}$$

bestehen. Für $V(u)$ und $W(u)$ sind die oben erwähnten Normierungen sinngemäß anzuwenden. Im Punkte $u = 0$ sind $V(u)$ und $W(u)$ jedoch beide unstetig; sie besitzen dort (wie leicht einzusehen ist) je einen Sprung der Größe $\frac{B_\delta}{C_\delta}$ bzw. B_δ. Wie aus Formel (4') des § 1 angewandt auf (1') durch elementare Überlegung unter Berücksichtigung von (21), (23) und (24) folgt, gilt

$$\chi(u) = C_\delta V(u) - W(u), \qquad 0 \leqq u < \infty. \tag{25}$$

Der nun folgende zweite Schritt des Beweises besteht darin, in der gewonnenen Darstellung (1') das dortige Stieltjessche Integral speziell als eine Dirichletsche Reihe zu kennzeichnen. Dieses würde aber auf eine Aussage über die Belegungsfunktion $\chi(u)$ hinauslaufen; gemäß den Ausführungen in der Einleitung wäre also zu zeigen, daß es sich dabei um eine *Sprungfunktion* handelt. Aus den voraufgegangenen allgemeinen Untersuchungen ist zunächst nur bekannt, daß $\chi(u)$ in jedem endlichen Teilintervall von $(0, \infty)$ von beschränkter Variation ist.

Eine Spezialisierung dieser Eigenschaft gewinnt man aber aus Formel (25). Die dort auftretende monotone Belegungsfunktion $V(u)$ gehört, gemäß (23), zu der totalmonotonen Funktion $\Phi(u)$, die wir aus (18) explizit kennen, so daß es also möglich ist, $V(u)$ zu bestimmen: Da $\Phi(u)$ eine Dirichletsche Reihe ist, so ist gemäß der Einleitung $V(u)$ eine Sprungfunktion mit Sprüngen an den Stellen λ_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, jeder Sprung mit $\nu = 0$ hat die Größe 1, wobei (vgl. S. 182) $\lambda_0 = 0$ zu setzen ist. Da wegen (6) die Exponenten monoton wachsen, handelt es sich speziell um eine *Treppenfunktion*, d. h. es gibt *keine Häufungsstellen der Sprünge* im Inneren von $(0, \infty)$ und damit also auch *keine stetigen Wachstumsstellen* der monotonen (nicht abnehmenden) Funktion $V(u)$. Diese Eigenschaft bedeutet aber insbesondere:

$$V(u) = \text{Konst. } \textit{für } \lambda_\nu < u < \lambda_{\nu+1}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots.$$

Von der Funktion $W(u)$ in (24) und (25) wissen wir, daß sie im ganzen Intervall $(0, \infty)$ monoton wächst. Damit können wir aber aus (25) eine Aussage über das Verhalten von $\chi(u)$ im Inneren jedes Intervalles $(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1})$ machen: *Als Differenz einer Konstanten und einer monoton wachsenden Funktion ist $\chi(u)$ daselbst monoton abnehmend*, d. h. es gilt

$$\chi(u) \textit{ monoton abnehmend für } \lambda_\nu < u < \lambda_{\nu+1}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{26}$$

Mit dem Ergebnis (1') lautet die Voraussetzung (10), wenn wir dort für $f(\sigma + \delta)$ das Stieltjessche Integral einsetzen, nach einiger Zwischenrechnung:

Es gibt ein $\delta > \delta'$ so, daß für jedes $\varkappa > 0$ und dazugehöriges $\mu = \mu(\varkappa)$ (im Sinne von (8))

$$\left| \int_0^\infty \left[\frac{u}{\lambda_\mu} e^{-\frac{u-\lambda_\mu}{\varkappa}} \right]^n d\chi(u) \right| \leqq C_\delta \tag{10''}$$

ist, wo nun $\chi(u)$ wegen (26) *im Inneren von $(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1})$ monoton abnimmt.*

Das Integral konvergiert ersichtlich absolut für $\frac{n}{\varkappa} > \delta$, d. h. also für alle $n = N, N+1, N+2, \ldots$ mit $N = N_\varkappa = [\varkappa \cdot \delta] + 1$.

Jetzt halten wir in (10″) ein $\varkappa > 0$ fest, welches wir speziell gleich einem Element der in (7) erklärten Menge $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ setzten, es sei also

$$\varkappa = \bar{\lambda}_\tau, \quad \tau \text{ positiv-ganzzahlig.} \tag{27}$$

Wegen (8) ergibt sich dazu ein $\mu(\varkappa)$ mit

$$\mu(\bar{\lambda}_\tau) = \tau. \tag{28}$$

Bei Benutzung der in (13) eingeführten Funktion $\omega(u, \varkappa)$ wird dann aus (10″), nachdem wir überall μ durch τ ersetzen,

$$\left| \int_0^\infty [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi(u) \right| \leqq C_\delta, \quad n = N, N+1, N+2, \ldots, \tag{29}$$

wo wieder $N = N_\tau = [\bar{\lambda}_\tau \cdot \delta] + 1$ zu setzen ist.

Wir unterteilen nun das Integrationsintervall folgendermaßen:

$$\left| \int_0^\infty [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi(u) \right| = \left| \int_0^{\lambda_\tau} \cdots + \int_{\lambda_\tau}^{\lambda_{\tau+1}} \cdots + \int_{\lambda_{\tau+1}}^\infty \right| \leqq C_\delta, \quad n = N, N+1, \ldots, \tag{30}$$

wo also $\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1} \in \{\lambda_\nu\}$ sind, und untersuchen jetzt das erste und dritte Integral des mittleren Ausdrucks.

Zuvor bemerken wir, daß auf Grund der Eigenschaften (13′), (14) und (14′) der Funktion $\omega(u, \varkappa)$ wegen (27)

$$0 \leqq \omega(u, \bar{\lambda}_\tau) \leqq 1 \text{ für } 0 \leqq u \leqq \lambda_\tau \text{ und } \lambda_{\tau+1} \leqq u \leqq \infty \tag{31}$$

gilt, da ja mit $\varkappa = \bar{\lambda}_\tau$ das (einzige) Maximum von ω in u im Inneren von $(\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1})$ liegt, und ferner

$$\omega(\infty, \bar{\lambda}_\tau) = 0 \tag{31'}$$

ist. Demzufolge gilt aber für das erste Integral des mittleren Teils von (30)

$$\left| \int_0^{\lambda_\tau} [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi(u) \right| \leqq \int_0^{\lambda_\tau} |d\chi(u)| < \infty, \quad n = N+1, N+2, \ldots, \tag{32}$$

denn $\chi(u)$ ist ja von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall. Das Integral rechts in (32) bedeutet die *Totalvariation* von $\chi(u)$ in $[0, \lambda_\tau]$. Das letzte Integral in (30) schreiben wir in der Form

$$\int_{\lambda_{\tau+1}}^\infty [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi(u) = \int_{\lambda_{\tau+1}}^\infty [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^{n-N} d\bar{\chi}(u), \quad n = N+1, N+2, \ldots, \tag{33}$$

wo die Belegungsfunktion $\bar{\chi}(u)$ definiert ist durch

$$\bar{\chi}(u) = \int_0^u [\omega(t, \bar{\lambda}_\tau)]^N d\chi(t), \qquad 0 < u < \infty.$$

Hieraus ist insbesondere zu ersehen, daß $\bar{\chi}(u)$ im ganzen Intervall $[0, \infty]$ *beschränkt* ist, denn das definierende Stieltjesintegral konvergiert ja für $u = \infty$, wie aus der Voraussetzung (10″) für $n = N$ folgt. Jetzt wenden wir auf das Integral rechts in (33) die Formel der partiellen Integration für Stieltjessche Integrale an:

$$\int_{\lambda_{\tau+1}}^\infty \cdots = \bar{\chi}(u)\,[\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^{n-N}\Big|_{\lambda_{\tau+1}}^\infty - \int_{\lambda_{\tau+1}}^\infty \bar{\chi}(u)\, d[\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^{n-N}, \quad n = N+1, N+2, \ldots,$$

was hier gemacht werden kann, weil sämtliche auftretenden Integrale bzw. Grenzwerte, wie leicht einzusehen ist, existieren. Speziell ist bei Berücksichtigung von (31), und weil $\bar{\chi}(u)$ in $[\lambda_{\tau+1}, \infty]$ beschränkt ist, der erste Term auf der rechten Seite sicher in $[\lambda_{\tau+1}, \infty]$ für alle $n = N+1, N+2, \ldots$ *beschränkt.* Dasselbe erweist sich sofort auch für das Integral rechter Hand, wie man aus einer einfachen Abschätzung unter Benutzung der (vorhandenen) oberen Schranke von $\bar{\chi}(u)$ und der Tatsache erkennt, daß $\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)$ als Funktion von u in $[\lambda_{\tau+1}, \infty]$ *monoton abnimmt* und (31′) gilt.

Es gibt also eine nur von δ abhängige Zahl D_δ, so daß das Integral linker Hand in der letzten Formel unterhalb dieser Schranke bleibt, also ist das Integral in (33), d. i. das letzte in (30), für alle $n \geqq N+1$ beschränkt:

$$(34) \qquad \left| \int_{\lambda_{\tau+1}}^{\infty} [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi(u) \right| < D_\delta, \qquad n = N+1, N+2, \ldots .$$

Bezüglich des zweiten Integrals des mittleren Teils von (30) können wir nun aus (30), (32) und (34) schließen, daß es eine nur von δ abhängige Schranke A_δ gibt mit

$$(35) \qquad \left| \int_{\lambda_\tau}^{\lambda_{\tau+1}} [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi(u) \right| \leqq A_\delta, \qquad n = N+1, N+2, \ldots .$$

Hierbei hat $\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)$ an den Stellen $u = \lambda_\tau$ und $u = \lambda_{\tau+1}$ den Wert 1, wie aus (14) und (14′) für $\mu = \tau$ sofort zu ersehen ist. Im Inneren des Integrationsintervalles ist diese Funktion daher größer als 1, da ja, wie soeben bemerkt, dort ihr Maximum liegt und sie sonst keine Extrema hat und durchweg stetig ist.

Die Belegungsfunktion $\chi(u)$ stellen wir im Intervall $[\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1}]$ als Summe zweier Funktionen

$$\chi(u) = \chi^{(1)}(u) + \chi^{(2)}(u), \qquad \lambda_\tau \leqq u \leqq \lambda_{\tau+1},$$

dar, die definiert sind durch

$$(36) \qquad \chi^{(1)}(u) = \chi(u) \text{ für } \lambda_\tau \leqq u < \lambda_{\tau+1}, \quad \chi^{(1)}(\lambda_{\tau+1}) = \chi(\lambda_{\tau+1} - 0)$$

und

$$(36') \qquad \chi^{(2)}(u) = 0 \text{ für } \lambda_\tau \leqq u < \lambda_{\tau+1}, \qquad \chi^{(2)}(\lambda_{\tau+1}) = \alpha_{\tau+1}.$$

Dabei bedeutet $\alpha_{\tau+1}$ die *Größe des Sprunges*, den die Funktion $\chi(u)$ an der Stelle $u = \lambda_{\tau+1}$ hat. Der Fall der Stetigkeit in diesem Punkte ist mit $\alpha_{\tau+1} = 0$ einbegriffen, da ja infolge der beschränkten Variation von $\chi(u)$ bekanntlich keine anderen Unstetigkeiten als Sprünge auftreten können. Gemäß der Normierung S. 185 ist die Funktion $\chi(u)$ und damit $\chi^{(1)}(u)$ im beiderseits abgeschlossenen Intervall $[\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1}]$ rechtsstetig, ferner ist $\chi^{(1)}(u)$ laut obiger Definition im Punkte $u = \lambda_{\tau+1}$ linksstetig. Daher folgt, daß $\chi^{(1)}(u)$ im *ganzen beiderseits abgeschlossenen Intervall* $[\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1}]$ *monoton ist*, denn die Monotonie im offenen Intervall $(\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1})$ ist ja mit (26) gegeben. Mit obiger Festsetzung schreiben wir jetzt das Integral in (35) in der Form

$$(37) \qquad \int_{\lambda_\tau}^{\lambda_{\tau+1}} [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi(u) = \int_{\lambda_\tau}^{\lambda_{\tau+1}} [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi^{(1)}(u) + \int_{\lambda_\tau}^{\lambda_{\tau+1}} [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi^{(2)}(u).$$

Aus der bekannten Definitionsgleichung für das Stieljessche Integral folgt aber mit (36′) für das zweite Integral auf der rechten Seite, daß es gleich der oben erwähnten Sprunggröße $\alpha_{\tau+1}$ ist, da nach (14′) $\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)$ an der Stelle $u = \lambda_{\tau+1}$ den Wert 1 hat:

$$(38) \qquad \int_{\lambda_\tau}^{\lambda_{\tau+1}} [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi^{(2)}(u) = \alpha_{\tau+1}, \quad \textit{für alle } n = N+1, N+2, \ldots .$$

Jetzt wählen wir zwei positive Zahlen η_1 und η_2 so, daß

$$\lambda_\tau < \eta_1 < \eta_2 < \lambda_{\tau+1} \tag{39}$$

gilt, sonst aber beliebig. Mit (39), (37) und (38) wird nun aus dem Integral in (35)

$$\int_{\lambda_\tau}^{\lambda_{\tau+1}} [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi(u) = \int_{\lambda_\tau}^{\eta_1} \cdots d\chi^{(1)}(u) + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \cdots d\chi^{(1)}(u) + \int_{\eta_2}^{\lambda_{\tau+1}} \cdots d\chi^{(1)}(u) + \alpha_{\tau+1}. \tag{40}$$

Setzen wir nun

$$\omega(\eta_1, \bar{\lambda}_\tau) = G_1; \quad \omega(\eta_2, \bar{\lambda}_\tau) = G_2,$$

so ist, wie aus der Betrachtung S. 188 folgt, $\omega(u, \bar{\lambda}_\tau) > 1$ im Inneren von $(\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1})$, d. h. also $G_1 > 1$ und $G_2 > 1$. Es sei

$$\operatorname{Min}(G_1, G_2) = G > 1$$

gesetzt, dann besteht für das zweite Integral rechts in (40) die Abschätzung

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi^{(1)}(u) \right| \geqq G^n \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left| d\chi^{(1)}(u) \right|, \qquad n = N+1,\ N+2, \ldots,$$

denn G ist ja zugleich das Minimum von $\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)$ in $[\eta_1, \eta_2]$, da ja ω als einziges Extremum in $(\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1})$ ein Maximum besitzt. Da nun weiter $\chi^{(1)}(u)$ in $[\eta_1, \eta_2]$ monoton abnimmt, so kann man beim Integral auf der rechten Seite, welches ja die *totale Variation* von $\chi^{(1)}(u)$ im Intervall $[\eta_1, \eta_2]$ bedeutet, die Betragstriche weglassen, wenn man dabei das Vorzeichen des Integrales umkehrt. Wir erhalten schließlich

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} [\omega(u, \bar{\lambda}_\tau)]^n d\chi^{(1)}(u) \right| \geqq G^n [\chi^{(1)}(\eta_1) - \chi^{(1)}(\eta_2)], \quad n = N+1,\ N+2, \ldots, \tag{41}$$

wo also $[\chi^{(1)}(\eta_1) - \chi^{(1)}(\eta_2)] \geqq 0$ ist.

Wäre nun $\chi^{(1)}(\eta_1) > \chi^{(1)}(\eta_2)$, so würde mit wachsendem n die rechte Seite von (41) über alle Grenzen wachsen, da $G > 1$ ist, und damit auch das links in (41) stehende Integral. Andererseits haben in (40) *alle drei* auf der rechten Seite stehenden Integrale stets *dasselbe Vorzeichen* für alle $n = N+1, N+2, \ldots$, denn $\chi^{(1)}(u)$ ist in $[\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1}]$ *monoton* und $\omega(u, \bar{\lambda}_\tau) \geqq 0$; der letzte Term rechts in (40) ist jedoch von n unabhängig. Daher würde auch die linke Seite von (40) mit wachsendem n über alle Grenzen wachsen, falls das Integral auf der linken Seite von (41) beliebig groß wird. Dies stünde aber im Widerspruch zur Beziehung (35), die wir aus der Voraussetzung hergeleitet haben. Daraus folgt nun aber, daß in (41)

$$\chi^{(1)}(\eta_1) = \chi^{(1)}(\eta_2), \qquad \eta_1, \eta_2 \in (\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1}), \tag{42}$$

sein muß. Da nun weiter η_1 und η_2 keiner weiteren Bedingung als (39) unterworfen sind, folgt mit (36) aus (42), daß *im Inneren des Intervalles* $(\lambda_\tau, \lambda_{\tau+1})$

$$\chi(u) = \text{Konst.} \tag{43}$$

ist.

Nun kann aber offenbar die obige Überlegung für *jedes* Intervall $(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1})$ durchgeführt werden, denn in (27) kann man ja $\varkappa$ jedem beliebigen Element der mit (7) erklärten Menge $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ gleich setzen. Durch eine ähnliche Untersuchung zeigt man mit Hilfe der hier angewandten Methoden auch die Gültigkeit von (43) im Intervall $(0, \lambda_1)$, dieses sei daher dem Leser überlassen. Es gilt also

$$\chi(u) = c_\nu, \quad \lambda_\nu < u < \lambda_{\nu+1}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{44}$$

Da aber wegen der Forderung in (9′) die Funktion $f(\sigma)$ nicht identisch verschwindet, so muß die Belegungsfunktion $\chi(u)$ in der Darstellung (1′) Wachstumsstellen besitzen.

Wegen (44) und da, wie S. 185 bemerkt wurde, $\chi(u)$ in $u = 0$ stetig ist, können diese Wachstumsstellen von $\chi(u)$ *nur an den Punkten* $u = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ liegen, das heißt aber wegen (6), daß es sich nur um *isolierte* Wachstumsstellen handeln kann. Daraus kann man nun sofort weiter schließen, daß diese Wachstumsstellen *Unstetigkeitsstellen* und damit notwendig *Sprünge* sein müssen. Demnach ist aber die Belegungsfunktion in (1') eine *Sprungfunktion* im Sinne der Einleitung (hier also speziell eine Treppenfunktion). Den dortigen Ausführungen zufolge ist dann aber das Stieltjessche Integral (1') S. 185 einer solchen Belegung gleich einer Dirichletschen Reihe,

$$(45) \qquad f(\sigma + \delta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma}, \qquad \sigma > \delta,$$

die also, ebenso wie das Integral, für $\sigma > \delta$ *absolut konvergiert*. Die Koeffizienten α_ν der Reihe sind die Sprunggrößen von $\chi(u)$ an den Stellen $u = \lambda_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Das Ergebnis (45) kann man nun in der Form

$$(2') \qquad f(\sigma) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma}, \quad \textit{absolut konvergent für } \sigma > 2\delta,$$

schreiben, wo

$$(46) \qquad a_\nu = \alpha_\nu \cdot e^{\lambda_\nu \delta}$$

gesetzt wurde. Dies besagt also, daß es zu dieser Reihe ein σ_0 mit $-\infty \leqq \sigma_0 < \infty$ gibt (ersichtlich ist $\sigma_0 \leqq 2\delta$), so daß die Reihe für alle $\sigma > \sigma_0$ absolut konvergiert. Damit ist der Beweis von Satz 2 vollendet.

§ 3.

Erfüllt eine Funktion aus (9), (9'), (9'') die Bedingung (10), d. h. also, ist sie in unserem Sinne in eine Dirichletsche Reihe entwickelbar, dann erfüllt sie die Bedingung (10) nicht nur mit einem $\delta = \delta_1$, sondern, wie aus dem Beweis für die Notwendigkeit von (10) zu ersehen ist, für *alle unendlich vielen* δ mit $\delta > \delta_1$. Die im Verlaufe des Beweises für den hinreichenden Teil auftretenden Größen $\chi(u)$ und α_ν sind ersichtlich von der Wahl des $\delta > \delta_1$ abhängig. Andererseits ist aber aus der Theorie der Dirichletschen Reihen bekannt, daß im Falle der Entwickelbarkeit einer Funktion in eine solche konvergente Reihe es *genau eine* solche Dirichletentwicklung gibt [8]). Daraus folgt nun, daß der in (46) dargestellte Koeffizient a_ν von δ *unabhängig* ist.

Mit Hilfe dieser Bemerkung formulieren wir nun einen Spezialfall unseres Entwicklungssatzes, und zwar wollen wir $\delta' = 0$ in (5) voraussetzen. Diesem Fall kommt übrigens in der Theorie der fastperiodischen Funktionen eine besondere Bedeutung zu [9]). Mit

$$(5') \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\lambda_\nu \delta} \textit{ konvergent für alle } \delta > 0$$

können wir das σ_0 des Satzes 2 jetzt sogar angeben.

Satz 3. *Es sei $f(\sigma)$ eine vorgelegte Funktion die* (9), (9'), (9'') *mit $\sigma' \leqq 0$ erfüllt. Es ist dann und nur dann*

$$f(\sigma) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma}, \textit{ absolut konvergent für } \sigma > 0, \; a_\nu \textit{ reell},$$

[8]) Vgl. *E. Landau*, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig 1909, und Note II des Verf. (S. 331), zitiert in Fußnote [2]).

[9]) *H. Bohr*, Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III. Acta Math. **47** (1926), 237—281, insbes. S. 261.

wo $\{\lambda_\nu\}$ *eine vorgegebene, der Bedingung* (5′) *genügende Menge ist, wenn für jedes beliebig kleine* $\delta > 0$ *und jedes* $\varkappa > 0$

$$\left|\left(\frac{e^{\frac{\lambda_{\mu(\varkappa)}}{\varkappa}}}{\lambda_{\mu(\varkappa)}}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}+\delta\right)\right| \leqq C_\delta \quad \textit{ist für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dabei ist $0 < C_\delta < \infty$ *nur von* δ *und der gegebenen Funktion abhängig.*

Für $\lambda_{\mu(\varkappa)} \in \{\lambda_\nu\}$ gilt wieder die Festsetzung (8).

Beweis. Man schließt ganz nach dem Vorbild des Beweises von Satz 2. Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich, indem man die Abschätzung (16) für jedes $\delta > 0$ zeigt, was ersichtlich möglich ist, da ja nach Voraussetzung die Reihe $\Sigma a_\nu e^{-\lambda_\nu \delta}$ für alle $\delta > 0$ absolut konvergiert. Um nun zu zeigen, daß obige Bedingung auch hinreicht, betrachtet man die Voraussetzung zunächst für irgendein festes $\delta_1 > 0$, und gelangt damit zu den Ergebnissen (45), (2′) und (46), denn zufolge der obigen Bemerkung ist ja die Aussage (10) für jedes $\sigma > \delta$ richtig, wenn sie für beliebig kleine $\delta > 0$ zutrifft. Ferner ist in (46) der Koeffizient a_ν von der Wahl dieses δ unabhängig; nach Voraussetzung ergibt sich das aber für *alle* δ mit $\delta_1 > \delta > 0$. Es konvergiert sodann die Reihe (2′) für beliebig kleine $\delta > 0$, damit also für $\sigma > 0$, d. i. die Behauptung.

Zum Abschluß wollen wir zeigen, wie man zu einer entwickelbaren Funktion die dazugehörigen Dirichletkoeffizienten a_ν ermitteln kann. Dazu formulieren wir den

Satz 4. *Ist eine Funktion* $f(\sigma)$ *im Sinne von Satz* 2 *in eine Dirichletsche Reihe entwickelbar, dann ergeben sich die Entwicklungskoeffizienten* a_ν *aus*

$$a_\nu = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e}{\lambda_\nu}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda_\nu}\right), \tag{47}$$

wo λ_ν *die Glieder der vorgegebenen Exponentenfolge* (λ_ν) *sind.*

Beweis. Es besteht nun für $f(\sigma)$ die Darstellung (2) und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\sigma_0 < 0$ annehmen. Dann gilt

$$f(\sigma) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu \sigma}, \quad \textit{absolut konvergent für } \sigma \geqq 0. \tag{2}$$

Auf eine Dirichletsche Reihe dieser Form können wir aber ein Ergebnis der Note II anwenden[10]), welches besagt, daß man im Falle der Entwickelbarkeit die Koeffizienten aus

$$a_\nu = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e}{\lambda_\nu}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda_\nu}\right) \tag{48}$$

erhält[11]).

Mit dem Eindeutigkeitssatz der Dirichletentwicklung liefert dies die Behauptung.

[10]) Siehe S. 332 und 335 der in Fußnote [2]) zitierten Note II.

[11]) Eine solche Darstellungsformel (48) für Dirichletkoeffizienten war vorher in *D. V. Widder*, A Classification of Generating Functions, Trans. Am. Math. Soc. **39** (1936), 244—298 bewiesen, doch war mir bei der Drucklegung der Note II das Ergebnis von Herrn Widder nicht bekannt.

Eingegangen 27. Juni 1960.

On the Inversion of Even Functions of Finite Abelian Groups (mod H).

By *Eckford Cohen* in Knoxville (Tennessee).

1. Introduction.

In two previous papers [1], [2], the author has considered the Fourier inversion of *even* functions (mod r), that is, (complex-valued) functions $f(n, r)$ of an integral variable n such that $f(n, r) = f((n, r), r)$ for all n, where r denotes a fixed positive integer and (n, r) the greatest common divisor of n and r. The second of these two papers also contained a corresponding discussion of the class of *primitive* functions (mod r), that is, functions $f(n, r)$ characterized by the property, $f(n, r) = f(\gamma(n, r), r)$, where $\gamma(r)$ denotes the greatest square-free divisor of r and $\gamma(n, r) = \gamma((n, r))$. In a more recent paper [6], an inversion theory of Möbius type for these two classes of functions has also been developed.

It is evident that the primitive functions (mod r) form a subclass of the even functions (mod r), while the latter class is included in the class of *periodic* functions (mod r), more precisely, the functions $f(n, r)$ satisfying $f(n, r) = f(n + r, r)$ for all n. The development of the Fourier theory in [1] and [2] was basically trigonometric, proceeding from the periodicity feature of the even functions (mod r). On the other hand, the Möbius theory of [6] was purely arithmetical in nature, being developed along lines quite independent of the Fourier theory.

It is the purpose of the present paper to develop analogous inversion theories for functions of finite abelian groups. In particular, let X denote the (multiplicative) semi-group of the finite abelian groups (cf. [7]) and let H be a group of X. The complex-valued function $f(G, H)$, defined for all G in X, will be called *even* (mod H) provided $f(G, H) = f((G, H), H)$, where (G, H) denotes the greatest common direct factor of G and H in X. Define now a group H of X to be *separable* if H has no repeated direct factors other than the identity I, and denote by $\gamma(H)$ the maximal separable direct factor of H in X (in the sense of group order). We shall call the function $f(G, H)$ *primitive* (mod H) if $f(G, H) = f(\gamma(G, H))$ for all G in X, where $\gamma(G, H) = \gamma((G, H))$. It is clear that the even functions (mod H) contain the primitive functions as a subclass.

The preceding definitions relating to abelian groups are entirely analogous to the earlier ones relating to integers, if the integers n are restricted to the *positive* integers. However, the approach of this paper to the inversion of the even and primitive functions (mod H) is quite different from that used in [1], [2], and [6] in the treatment of the corresponding classes of functions (mod r). The difference is twofold. In the first place, the development of this paper is arithmetical throughout, and in the second place the

theory is unified, with the Möbius theory arising as a natural (though by no means immediate) consequence of the Fourier theory. The arithmetical approach of the paper is not merely an incidental feature, but is essentially forced upon us by the fact that in X there exists no evident analogue of the concept of periodicity.

All proofs and results of the paper become valid in the case of the integers if group terminology is replaced by appropriate terms relating to the integers. (In this connection we mention the isomorphism between the semigroup of the completely reducible finite abelian groups and the semigroup of the positive intergers under multiplication [7, § 1]). It is, however, significant that the Fourier theory constructed in earlier papers turns out to be entirely independent of the additivity of the integers. The considerations of this paper thus serve to unify and arithmetize the existing theory, as well as to clarify its indispensable features.

The theory of even functions (mod r) in [1] and [2] was based ultimately on an orthogonality property of the Ramanujan sum $c(n, r)$, which arose from the definition of $c(n, r)$ in terms of the additive characters of the integers (mod r). This orthogonality feature was largely lost (or rather disguised) in the Möbius theory of [6]. In the unified theory of the present paper, the notion of orthogonality is restored to a leading rôle. The function $c(n, r)$ is now replaced by a function defined on the basis of analogy with the familiar multiplicative representation of $c(n, r)$. The orthogonal character of this function is exhibited by (4. 1) and, in an equivalent formulation, by (4. 2). As a simple by-product of the latter relation, we obtain in (4. 6) a group analogue of the Brauer-Rademacher identity [3, (5. 2)].

At several points of the paper, proofs are shortened by referring to relevant arguments previously carried out in detail for the case of the intergers. The headings of the remaining sections of the paper are: notation and review, fundamental formulas, Fourier inversion, Möbius inversion, expansions and identities.

Remark 1. 1. It is not difficult to see that the content of this paper can be generalized to functions defined on arbitrary arithmetical semigroups with a unique factorization law and a totally multiplicative norm function ϱ such that $\varrho(\alpha) = 1$ if and only if α is the identity.

2. Notation and review.

In this section we recall some basic facts concerning functions over X which were proved in [7]. We introduce first some further notation. If D and E are groups of X, then the direct product of D and E in X will be denoted $D \cdot E = DE$. The assertion, D is a direct factor of H will be represented $D \mid H$, and the factor group in X of H (mod D) will be denoted H/D. The direct product of D by itself k times will be denoted D^k ($D^1 = D$) with the convention $D^0 = I$.

If $(D, E) = I$, then D and E are called *relatively prime*. A function, not identically 0, which maps X into the multiplicative semigroup of the complex field in such a way that $f(DE) = f(D) f(E)$ whenever D and E are relatively prime is called (relatively) *multiplicative*. The following result was proved in [7, Theorem 2. 1].

Lemma 2. 1. *If $f_1(H)$ and $f_2(H)$ are multiplicative, then so is the function*

$$f(H) = \sum_{DE=H} f_1(D) f_2(E),$$

where the summation is over all D, E in X such that $DE = H$.

The next result, proved in [7, Theorem 2. 2], is fundamental for this paper.

Lemma 2. 2. *There exists a unique function $\mu(H)$ defined in X satisfying the relation,*

$$\sum_{D|H} \mu(D) = e(H) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } H = I \\ 0 & \text{if } H \neq I, \end{cases} \tag{2. 1}$$

the summation being over the direct factors D of H in X. Moreover, the function $\mu(H)$ is multiplicative.

Clearly, $\mu(H)$ is the X-analogue of the Möbius function. By [7, (2. 2)] we have, for indecomposable groups P,

$$\mu(P^k) = 0 \text{ if } k > 0, \qquad \mu(P) = -1. \tag{2. 2}$$

This fact, in connection with the multiplicativity property, completely determines $\mu(H)$. In particular,

Remark 2. 1. *The function $\mu(H)$ is integer-valued: $\mu(H)$ is 1 or -1 for separable H and $= 0$ for inseparable H.*

The property (2. 1) of $\mu(H)$ leads to the following analogue of the Möbius inversion formula ([7, Theorem 2. 6]).

Lemma 2. 3. *If $f(H)$ and $f'(H)$ are defined for all H in X, then*

$$f(H) = \sum_{D|H} f'(D) \rightleftarrows f'(H) = \sum_{DE=H} f(D)\,\mu(E). \tag{2. 3}$$

If $f(H)$ is defined by the left of (2. 3), then $f'(H)$ will be called the (direct) Möbius image of $f(H)$. Thus by (2. 3), we have the

Remark 2. 2. *A function $f(H)$ defined in X has a unique Möbius image.*

3. Fundamental formulas.

Let $\varrho(H)$ denote the order of the group $H \in X$. By Lemma 2. 3, there exists a unique function $c(G, H)$ of H, defined for all G in X, which satisfies

$$\sum_{D|H} c(G, D) = \eta(G, H) \equiv \begin{cases} \varrho(H) & \text{if } H \mid G, \\ 0 & \text{if } H \nmid G. \end{cases} \tag{3. 1}$$

Explicitly, by (2. 3)

$$c(G, H) = \sum_{DE=H} \eta(G, D)\,\mu(E) = \sum_{\substack{D|(G,H) \\ DE=H}} \varrho(D)\,\mu(E). \tag{3. 2}$$

Lemma 3. 1. *The function $c(G, H)$ is even* (mod H), *is integer-valued, and is multiplicative as a function of H for each $G \in X$.*

Proof. The parity property (mod H) of $c(G, H)$ is an immediate consequence of (3. 2). That $c(G, H)$ is integer-valued follows from Remark 2. 1 and (3. 2). The multiplicativity of $c(G, H)$ in the variable H results from the corresponding property of $\mu(H)$ and $\eta(G, H)$, on the basis of Lemma 2. 1 and (3. 2).

By (3. 2) we have

$$c(G, H) = \mu(H) \text{ if } (G, H) = I; \tag{3. 3}$$

in particular $c(I, H) = \mu(H)$. Define now $\varphi(H) = c(H, H)$ so that again by (3. 2),

$$\varphi(H) = c(G, H) \text{ if } H \mid G. \tag{3. 4}$$

Lemma 3. 2. *$\varphi(H)$ is multiplicative and*

$$\varphi(H) = \sum_{DE=H} \varrho(D)\,\mu(E); \tag{3. 5}$$

if P is indecomposable, then

$$\varphi(P^k) = \varrho^{k-1}(P)\,(\varrho(P)-1) \text{ if } k>0, \quad \varphi(I)=1. \tag{3.6}$$

Proof. By (3. 2), Lemma 3. 1, and the evaluation of $\mu(P^k)$ in (2. 2).

We note by (3. 6):

Remark 3. 1. *$\varphi(H) > 0$ for all $H \in X$.*

We digress for a discussion of functions $f(H)$ with the property that $f(H) = f(\gamma(H))$ for all $H \in X$; such functions will be called *separable.*

Lemma 3. 3. *A function $f(H)$ is separable if and only if its Möbius image vanishes for all inseparable groups H of X.*

Proof. If $f'(H)$ is the Möbius image of $f(H)$ and $f(H)$ is separable, then by remark 2. 1,

$$f(H) = \sum_{D|H} f'(D) = \sum_{D|\gamma(H)} f'(D) = \sum_{D|H} \mu^2(D)\, f'(D). \tag{3.7}$$

By Remark 2. 2, $f'(H) = \mu^2(H)\, f'(H)$, which proves the necessity of the condition in the Lemma. The sufficiency is clear.

Lemma 3. 4. *Let $f(H)$ represent a separable, multiplicative function of X into the multiplicative group of the complex field. If $f'(H)$ is the Möbius image of $f(H)$ then for each $G \in X$,*

$$\sum_{\substack{D|H \\ (D,G)=I}} f'(D) = \frac{f(H)}{f((G,H))}, \tag{3.8}$$

the summation on the left extending over all direct factors D of H such that D is relatively prime to G.

Proof. If the left member of (3. 8) is denoted $Q(G, H)$, then by Lemma 3. 3,

$$Q(G,H) = \sum_{\substack{D|H \\ (D,G)=I}} \mu^2(D)\, f'(D) = \sum_{\substack{D|\gamma(H) \\ (D,G)=1}} f'(D) = \sum_{D\left|\frac{\gamma(H)}{\gamma(G,H)}\right.} f'(D).$$

Hence $Q(G, H) = f(\gamma(H)/\gamma(G, H))$. Since $\gamma(G, H)$ and $\gamma(H)/\gamma(G, H)$ are relatively prime, the multiplicativity and separability properties of $f(H)$ yield

$$f(\gamma(G,H))\,Q(G,H) = f(\gamma(H)) = f(H);$$

this proves (3. 8) because $f(\gamma(G, H)) \neq 0$.

Lemma 3. 5. *Under the hypotheses of the preceding Lemma,*

$$f(H) = \frac{f(D)\,f(E)}{f((D,E))} \quad \text{if} \quad H = DE. \tag{3.9}$$

Proof. By the multiplicative property of $f(H)$, it is sufficient to verify (3. 9) in case H is of the form $H = P^k$, P indecomposable. This verification is almost immediate under the remaining two hypotheses.

A function $f(H)$ is called *totally multiplicative* if f is a homomorphism of X into the multiplicative group of the complex field. Since $\varrho(H)$ is totally multiplicative, it follows from (3. 5) that

$$\bar{\varphi}(H) \equiv \frac{\varphi(H)}{\varrho(H)} = \frac{\mu(D)}{\varrho(D)}. \tag{3.10}$$

By Lemma 3. 2, Remark 3. 1, and Lemma 3. 3, we have

Remark 3. 2. *The function $\bar{\varphi}(H)$ satisfies the three hypotheses of Lemma 3. 4.*

Next we obtain a closed evaluation of $c(G, H)$, the "Hölder relation" for $c(G, H)$.

Theorem 3. 1 (cf. [1, (5)]).

$$c(G, H) = \frac{\varphi(H)\,\mu(L)}{\varphi(L)}, \quad L = H/(G, H). \tag{3. 11}$$

Proof. By (3. 2) one obtains

$$c(G, H) = \sum_{\substack{DE = H \\ D\Delta = (G, H)}} \varrho(D)\,\mu(E) = \sum_{D\Delta = (G, H)} \varrho(D)\,\mu(H/D).$$

By Remark 2. 1 and the multiplicativity properties of $\mu(H)$ and $\varrho(H)$, with $K = (G, H)$,

$$c(G, H) = \sum_{D\Delta = K} \varrho(D)\,\mu(L \cdot \Delta) = \varrho(K)\,\mu(L) \sum_{\substack{\Delta \mid K \\ (\Delta, L) = I}} \frac{\mu(\Delta)}{\varrho(\Delta)}.$$

The function $\mu(G)/\varrho(G)$ is the Möbius image of $\bar{\varphi}(G)$. Hence, by Remark 3. 2 and Lemmas 3. 4 and 3. 5, we obtain, since $H = KL$,

$$c(G, H) = \frac{\varrho(K)\,\mu(L)\,\bar{\varphi}(K)}{\bar{\varphi}((K, L))} = \frac{\varrho(K)\,\mu(L)\,\bar{\varphi}(H)}{\bar{\varphi}(L)},$$

and (3. 11) results by definition of $\bar{\varphi}(G)$.

Corollary 3. 1. 1. *If* $D \mid H$, $E \mid H$, *then*

$$\varphi(D)\,c\,(H/E, E) = \varphi(E)\,c\,(H/E, D). \tag{3. 12}$$

Proof. Apply the theorem to both members of (3. 12) and note that

$$E/(E, H/D) = D/(D, H/E).$$

From (3. 11), (2. 2), and (3. 6) we have also

Corollary 3. 1. 2. *If* P *is indecomposable and* $k > 0$, *then*

$$c(G, P^k) = \begin{cases} \varrho^{k-1}(P)\,(\varrho(P) - 1) & \text{if } P^k \mid G, \\ -\varrho^{k-1}(P) & \text{if } P^{k-1} \mid G,\ P^k \nmid G, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3. 13}$$

Placing $G = H$ in (3. 1) we get

$$\sum_{D \mid H} \varphi(D) = \varrho(H). \tag{3. 14}$$

The function $\varphi(H)$ is analogous to the ordinary Euler totient $\varphi(r)$, characterized by the relation,

$$\sum_{d \mid r} \varphi(d) = r.$$

Another group analogue $\Phi(H)$ of $\varphi(r)$ was introduced in [7, § 2]; the characteristic property of $\Phi(H)$ was shown to be

$$\sum_{D \mid H} \Phi(D) = A(H), \tag{3. 15}$$

where $A(H)$ is the *grade of* H, meaning the number of groups in X of order $\leqq \varrho(H)$. The "order totient" $\varphi(H)$ corresponds to $\varphi(r)$ under the analogy of $\varrho(H)$ to $|r| = r$, while the "grade totient" $\Phi(H)$ is related to $\varphi(r)$ through the analogy between $A(H)$ and $[r] = r$. The multiplicative property of $\varphi(r)$ extends only to $\varphi(H)$; on the other hand the enumerative property of $\varphi(r)$ carries over to $\Phi(H)$.

4. Fourier inversion.

We prove first the basic orthogonality property of $c(G, H)$, stated in two equivalent forms.

Theorem 4. 1. *If D_1 and D_2 are direct factors of H, then*

$$\sum_{DE=H} \varphi(D)\, c(E, D_1)\, c(E, D_2) = \begin{cases} \varphi(B)\, \varrho(H) & \text{if } B \equiv D_1 = D_2, \\ 0 & \text{if } D_1 \neq D_2; \end{cases} \tag{4. 1}$$

equivalently,

$$\sum_{D|H} c(H/D, D_1)\, c(H/D_2, D) = \begin{cases} \varrho(H) & \text{if } D_1 = D_2 \\ 0 & \text{if } D_1 \neq D_2. \end{cases} \tag{4. 2}$$

Proof. It is convenient to prove (4. 2) first. Denoting the left side of (4. 2) by $\beta(H)$, we obtain by (3. 2),

$$\beta(H) = \sum_{D|H} c(H/D_2, D) \sum_{\substack{D^*|H/D \\ D^*E=D_1}} \varrho(D^*)\, \mu(E) = \sum_{D^*E=D_1} \varrho(D^*)\, \mu(E) \sum_{D|H/D^*} c(H/D_2, D).$$

By (3. 1) the inner sum of the last expression is 0 unless $D_2 \mid D^*$; since the latter condition would imply that $D_2 \mid D_1$, it must follow that

$$\beta(H) = 0 \text{ if } D_2 \nmid D_1. \tag{4. 3}$$

supposing now that $D_2 \mid D_1$, application of (3. 1) yields

$$\beta(H) = \varrho(H) \sum_{\substack{D^*E=D_1 \\ D_2E^*=D^*}} \mu(E) = \varrho(H) \sum_{E^*E=D_1/D_2} \mu(E) \qquad (D_2 \mid D_1);$$

therefore, by (2. 1)

$$\beta(H) = \begin{cases} \varrho(H) & \text{if } D_1 = D_2 \\ 0 & \text{if } D_2 \mid D_1,\ D_1 \neq D_2. \end{cases} \tag{4. 4}$$

Together, (4. 3) and (4. 4) become (4. 2). The relation in (4. 1) results from (4. 2) on applying Corollary 3. 1. 1 to the second factor of the sum in (4. 2). The proof is complete.

Lemma 4. 1. *If $D \mid H$ and $f(G, D)$ is even* (mod D), *then $f((G, H), D) = f(G, D)$.*

Proof. Because

$$f(G, D) = f((G, D), D) = f(((G, H), D), D), = f((G, H), D).$$

Corollary 4. 1. 1. *For all G, H in X,*

$$\sum_{DE=H} \frac{\mu(D)}{\varphi(D)}\, c(G, D) = \begin{cases} \dfrac{\varrho(H)}{\varphi(H)} & \text{if } (G, H) = I \\ 0 & \text{if } (G, H) \neq I. \end{cases} \tag{4. 5}$$

Proof. In the first factor on the left of (4. 2) place $D_1 = H$ and apply Theorem 3. 1, and in the second factor place $D_2 = H/(G, H)$ and apply Lemma 4. 1.

Application of Lemma 2. 3 to (4. 5) gives the following group analogue of the Brauer-Rademacher identity.

Corollary 4. 1. 2.

$$\mu(H)\, c(G, H) = \varphi(H) \sum_{\substack{DE=H \\ (D,G)=I}} \frac{\varrho(D)\, \mu(E)}{\varphi(D)}. \tag{4. 6}$$

It will be noted that the identities (3. 1), (4. 5), and (4. 6) furnish examples of expansions of even functions (mod H) in terms of the functions $c(G, D)$, $D \mid H$. The existence and uniqueness of such expansions are assured by the following Fourier inversion theorem for the even functions (mod H).

Theorem 4. 2. *Let $f(G, H)$ and $\alpha(G, H)$ denote even functions (mod H). If $f(G, H)$ possesses an expansion of the form*

$$f(G, H) = \sum_{D \mid H} \alpha(D, H)\, c(G, D), \tag{4. 7}$$

then $\alpha(G, H)$ assumes the form

$$\alpha(G, H) = \frac{1}{\varrho(H)} \sum_{EE' = H} f(E', H)\, c(L, E), \quad L = H/(G, H). \tag{4. 8}$$

Conversely, if $\alpha(G, H)$ is defined by (4. 8), then $f(G, H)$ has the representation (4. 7).

Proof. Suppose that $f(G, H)$ has a representation (4. 7). Then

$$\sum_{EE' = H} f(E', H)\, c(L, E) = \sum_{D \mid H} \alpha(D, H) \sum_{EE' = H} c(E', D)\, c(L, E),$$

which, by (4. 2), is equal to $\varrho(H)\, \alpha((G, H), H) = \varrho(H)\, \alpha(G, H)$, thereby yielding (4. 8).

Assume now that $\alpha(G, H)$ is defined by (4. 8). Denoting the right of (4. 7) by $\lambda(H)$, one obtains

$$\lambda(H) = \frac{1}{\varrho(H)} \sum_{EE' = H} f(E', H) \sum_{D \mid H} c(H/D, E)\, c(G, D).$$

By Lemma 4. 1, G may be replaced by (G, H); (4. 2) shows then that the inner sum is 0 unless $E' = (G, H)$ so that $\lambda(H) = f((G, H), H) = f(G, H)$. This completes the proof.

Remark 4. 1. The representation (4. 7) is the "Fourier expansion" and the coefficients $\alpha(D, H)$ the "Fourier coefficients" of $f(G, H)$. Since the Fourier coefficients are defined for each direct factor D of H, they completely determine the even function $\alpha(G, H)$, which we call the "*Fourier image* (mod H)" of $f(G, H)$.

Corollary 4. 2. 1. *Every even function $f(G, H)$ has a Fourier representation (4. 7); the Fourier image (mod H) of $f(G, H)$ is uniquely determined by (4. 8).*

The corresponding result for the primitive functions (mod H) is as follows.

Theorem 4. 3. *An even function $f(G, H)$ is primitive (mod H) if and only if its Fourier coefficients vanish for all inseparable factors D of H.*

Proof. A primitive function (mod H) is an even function (mod H) which is also even (mod $\gamma(H)$). The theorem is therefore a corollary of Theorem 4. 2.

Definition. Let $\tau(H)$ denote the number of direct factors of H in X, and let $\vartheta(H)$ be the number of separable factors of H in X.

Evidently, by Corollary 4. 2. 1, the even functions (mod H) form a complex vector space with basis $c(D, H)$, $D \mid H$. More precisely, applying the orthogonality relation (4. 1) and the two preceding theorems, we have

Theorem 4. 4. *For each $H \in X$, the even functions (mod H) form a (complex) Euclidean vector space $S(H)$ of dimension $\tau(H)$ with orthonormal basis, $\dfrac{c(G, D)}{\sqrt{\varphi(D)\, \varrho(D)}}$ where D ranges over the direct factors of H in X; the inner product is defined, for functions f_1, f_2 in $S(H)$, by*

$$(f_1, f_2) = \sum_{DE = H} \varphi(D)\, f_1(E, H)\, \overline{f_2}(E, H), \tag{4. 9}$$

where $\bar{f}_2$ denotes the complex conjugate of f_2. The primitive functions (mod H) form a subspace of $S(H)$ of dimension $\vartheta(H)$.

5. Möbius inversion.

In the first theorem of this section we shall need

Lemma 5. 1. *Suppose that H, K are in X. Then*

$$\sum_{D|H} c(H/D, K)\,\mu(D) = \begin{cases} \mu\left(\dfrac{K}{H}\right)\varrho(H) & \text{if } H \mid K, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5. 1}$$

The proof is analogous to that in the case of the integers [5, Lemma 2] and will be omitted.

Theorem 5. 1. *Let $f(G, H)$ be even (mod H) and suppose that $F(H_1, H_2)$ is a function defined for all H_1, H_2 in X. If $f(G, H)$ is defined by*

$$f(G, H) = \sum_{D|(G,H)} F(D, H/D), \tag{5. 2}$$

then $F(H_1, H_2)$ has the representation,

$$F(H_1, H_2) = \sum_{D|H_1} f(H_1/D, H)\,\mu(D), \quad H = H_1 H_2. \tag{5. 3}$$

Conversely, if $F(H_1, H_2)$ is defined by (5. 3), *then $f(G, H)$ admits of the representation* (5. 2).

Proof. Substituting (3. 2) in (4. 7) it follows, just as in the case of the integers [1, (9)], that $f(G, H)$ has the form (5. 2), provided

$$F(H_1, H_2) = \varrho(H_1) \sum_{D|H_2} \alpha(H_1 D, H)\,\mu(D), \quad H = H_1 H_2. \tag{5. 4}$$

Assuming (5. 4) to hold, it follows from (4. 8) and (5. 1) that

$$\begin{aligned} F(H_1, H_2) &= \frac{1}{\varrho(H_2)} \sum_{EE'=H} f(E', H) \sum_{D|H_2} c(H_2/D, E)\,\mu(D) \\ &= \sum_{\substack{EE'=H \\ E=D'H_2}} f(E', H)\,\mu(E/H_2) = \sum_{D'E'=H_1} f(E', H)\,\mu(D'), \end{aligned}$$

which is (5. 3). This completes the proof of the second half of the theorem. The first half follows by (2. 1) as in the proof of the corresponding result in the case of the integers [6, Theorem 2. 1 (A)].

The representation (5. 2) is the "Möbius representation" of $f(G, H)$, while the function $F(H_1, H_2)$ defining the representation is the "Möbius image (mod H)" of $f(G, H)$.

Corollary 5. 1. 1. *Every even function $f(G, H)$ has a Möbius representation* (5. 2), *and its Möbius image (mod H) is uniquely determined by* (5. 3).

The following result is basic in discussing the inversion of the primitive functions (mod H).

Lemma 5. 2. *If H is separable, then*

$$c(G, H) = \sum_{\substack{D|H \\ (D,G)=I}} \varrho(D)\,\mu(D)\,\varphi(H/D). \tag{5. 5}$$

Proof. By Remarks 2. 1 and (4. 6), and the multiplicative nature of the functions involved.

We shall need two additional relations.

Lemma 5. 3. *If $K \mid H$ and $H = H_1 H_2$ where H_1 is separable, then*

$$(5.6)\qquad \sum_{D \mid \gamma(H)/H_1} \varphi(D)\, c(H_2/D, K) = \begin{cases} \dfrac{c(H_2, K)\, \varrho(\gamma(H))}{\varrho(H_1)} & \text{if } K \mid HH_1/\gamma(H) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Lemma 5. 4. *If $H = H_1 H_2$ where H_1 is separable, and if $L \mid \gamma(H)$, then*

$$(5.7)\qquad \sum_{\substack{D \mid HH_1/\gamma(H) \\ (L, H/D) = I}} c(H_2, D) = \begin{cases} \dfrac{\varrho(H)\, \mu(H_1)}{\varrho(\gamma(H))} & \text{if } L = H_1 \\ 0 & \text{if } L \neq H_1. \end{cases}$$

The latter relation is analogous to [6, Lemma 2. 1]. Both (5. 6) and (5. 7) need only be verified for the case $H = P^k$, P indecomposable, because all functions involved are multiplicative (Lemma 2. 1). Under this restriction on H, the two relations result on applying (3. 13), (3. 6), and (2. 2).

Theorem 5. 2. *Let $f(G, H)$ be a primitive function (mod H), and let $F(H_1, H_2)$ be a function defined for all H_1, H_2 of X, such that $F(H_1, H_2)$ is separable as a function of H_1. If $f(G, H)$ has the representation,*

$$(5.8)\qquad f(G, H) = \sum_{\substack{D \mid \gamma(H) \\ (D, G) = I}} F(D, H/D),$$

then $F(H_1, H_2)$ has the form

$$(5.9)\qquad F(H_1, H_2) = \frac{\varrho(\gamma(H))\, \mu(\gamma(H_1))}{\varrho(H)} \sum_{D \mid \frac{H\gamma(H_1)}{\gamma(H)}} f(H/D, H)\, c(H_2, D), \quad H = \gamma(H_1)\, H_2;$$

conversely, if $F(H_1, H_2)$ has the representation (5. 9), *then $f(G, H)$ is determined by* (5. 8).

Proof. On the basis of Lemma 5. 2, applied to (4. 7), it can be shown that $f(G, H)$ has the form (5. 8), if

$$(5.10)\qquad F(H_1, H_2) = \varrho(L_1)\, \mu(L_1) \sum_{D \mid \gamma(H)/L_1} \alpha(DL_1, H)\, \varphi(D), \qquad H = L_1 H_2,$$

where L_1 denotes $\gamma(H_1)$; the proof is similar to the corresponding result for the integers [2, (7. 4)]. We assume (5. 10) to hold. Substituting from (4. 8) in (5. 10) we get

$$F(H_1, H_2) = \frac{\varrho(L_1)\, \mu(L_1)}{\varrho(H)} \sum_{EE' = H} f(E', H) \sum_{D \mid \gamma(H)/L_1} \varphi(D)\, c(H_2/D, E).$$

By Lemma 5. 3, the inner sum is 0 unless $E \mid (HL_1)/\gamma(H)$; the direct factors E in the first summation can thus be restricted to the factors of $HL_1/\gamma(H)$, so that (5. 9) follows on applying (5. 6) and renaming the variable E. This proves one half of the theorem. The other half is a consequence of Lemma 5. 4 and is proved just as in the case of the integers [6, Theorem 2. 3(A)].

Corollary 5. 2. 1. *If $f(G, H)$ is primitive (mod H), then there exists a unique function $F(H_1, H_2)$ which is separable as a function of H_1 such that $f(G, H)$ has a representation of the form* (5. 8); *the function $F(H_1, H_2)$ satisfies* (5. 9).

6. Expansions and identities.

It was shown in [2], [3], [6] that expansions of even functions (mod r) form a rich source for relations between arithmetical fiunctions of integers. We note in this section group analogues of some of the general arithmetical identities proved in the papers mentioned above.

If $f(G, H)$ is even (mod H), we define the *associated function* $f^*(G, H)$ of $f(G, H)$ by $f^*(G, H) = f(L, H)$, $L = H/(G, H)$. Replacement of G by L in (4. 8) yields, on the basis of Lemma 4. 1,

Theorem 6. 1 (cf. [2, (5. 2)]). *If $\alpha(G, H)$ is the Fourier image (mod H) of the even function $f(G, H)$, then $\dfrac{f^*(G, H)}{\varrho(H)}$ is the Fourier image of $\alpha^*(G, H)$:*

$$\alpha^*(G, H) = \frac{1}{\varrho(H)} \sum_{D \mid H} f^*(D, H)\, c(G, D). \tag{6. 1}$$

Suppose the basis functions $c(G, D)$, $D \mid H$, to be replaced in (4. 7) by the orthonormal basis of Theorem 4. 4; then the Fourier coefficients $\alpha(D, H)$ are replaced, respectively, by $\alpha(D, H)\sqrt{\varphi(D)\,\varrho(D)}$, for each direct factor D of H. Moreover, since the $c(G, D)$ are real-valued, we have

Remark 6. 1. *An even function $f(G, H)$ has the Fourier image $\alpha(G, H)$ if and only if its complex conjugate $\bar{f}(G, H)$ has $\bar{\alpha}(G, H)$ as its Fourier image (mod H).*

The generalized Parseval identity for the space $S(H)$ yields then [8, § 8. 5].

Theorem 6. 2 (cf. [3, (4. 1)]). *If $f(G, H)$ and $g(G, H)$ are even functions (mod H) with Fourier images $\alpha(G, H)$ and $\beta(G, H)$, respectively, then*

$$\sum_{DE = H} \varphi(D)\, f(E, H)\, g(E, H) = \varrho(H) \sum_{D \mid H} \alpha(D, H)\, \beta(D, H)\, \varphi(D). \tag{6. 2}$$

The cases $g = f$, $g = \bar{f}$ in the theorem yield, respectively,

Corollary 6. 2. 1.

$$\sum_{DE = H} \varphi(D)\, f^2(E, H) = \varrho(H) \sum_{D \mid H} \alpha^2(D, H)\, \varphi(D); \tag{6. 3}$$

$$\sum_{DE = H} \varphi(D)\, |f(E, H)|^2 = \varrho(H) \sum_{D \mid H} |\alpha(D, H)|^2\, \varphi(D). \tag{6. 4}$$

The latter identity may be interpreted geometrically in the following terms.

Corollary 6. 2. 2. *If $\alpha^*(G, H)$ denotes the associated function of the Fourier image of $f(G, H)$, then the (invertible) transformation in $S(H)$, defined by*

$$f(G, H) \to \sqrt{\varrho(H)}\, \alpha^*(G, H),$$

is isometric, and is hence a Euclidean transformation of $S(H)$.

Next we note a generalization of Corollary 4. 1. 2.

Theorem 6. 3 (cf. [3, (5. 7)]). *If $f'(H)$ denotes the Möbius image of the function $f(H)$, defined in X, then*

$$\sum_{\substack{DE = H \\ (D, G) = 1}} \frac{\varrho(D)\, f'(E)}{\varphi(D)} = \sum_{DE = H} \left(\frac{f(E)\, \mu(D)}{\varphi(D)} \right) c(G, D). \tag{6. 5}$$

Proof. Denote the left member of (6. 5) by $\delta(G, H)$. Since the right of (4. 5) is $\dfrac{\varrho(H)}{\varphi(H)}\, e((G, H))$, Corollary 4. 1. 1 yields

$$\delta(G, H) = \sum_{DE = H} \frac{\varrho(D)\, f'(E)\, e((G, D))}{\varphi(D)} = \sum_{DE = H} f'(E) \sum_{D' \mid D} \frac{\mu(D')}{\varphi(D')}\, c(G, D')$$

$$= \sum_{D'E' = H} \frac{\mu(D')}{\varphi(D')}\, c(G, D') \sum_{E \mid E'} f'(E'/E),$$

which is the same as (6. 5).

The next expansion is analogous to (5. 2).

Theorem 6. 4. *If $f(G, H)$ is an even function (mod H) with Möbius image $F(H_1, H_2)$, then the associate $\alpha^*(G, H)$ of the Fourier image of $f(G, H)$ has the form*

$$\alpha^*(G, H) = \frac{1}{\varrho(H)} \sum_{D|(G,H)} F(H/D, D)\, \varrho(D). \tag{6. 6}$$

This result, in an equivalent form, is proved exactly like a related result for the integers [1, (10)]. The details are omitted.

Finally, we give a few illustrations. Define for arbitrary real s,

$$\varphi_s(H) = \sum_{DE=H} \varrho^s(D)\, \mu(E), \qquad \psi_s(H) = \sum_{DE=H} \varrho^s(D)\, \mu^2(E). \tag{6. 7}$$

We remark that $\varphi_1(H) = \varphi(H)$, $\varphi_0(H) = e(H)$, $\psi_0(H) = \vartheta(H)$. By multiplicativity considerations,

$$\psi_s(H) = \frac{\varphi_{2s}(H)}{\varphi_s(H)}, \qquad s \neq 0. \tag{6. 8}$$

The functions $\dfrac{\varphi_s(H)}{\varrho^s(H)}$ and $\dfrac{\psi_s(H)}{\varrho^s(H)}$ are separable and satisfy the conditions of Lemmas 3.4 and 3.5 if $s \neq 0$. The latter remarks, used in connection with Theorem 5.4, lead to the following Fourier expansions:

$$\frac{\varphi_s((G, H))}{\varrho^s((G, H))} = \frac{\varphi_{s+1}(H)}{\varrho^{s+1}(H)} \sum_{D|H} \left(\frac{\mu(D)}{\varphi_{s+1}(D)}\right) c(G, D), \quad s \neq -1 \tag{6. 9}$$

$$\frac{\psi_s((G, H))}{\varrho^s((G, H))} = \frac{\psi_{s+1}(H)}{\varrho^{s+1}(H)} \sum_{D|H} \left(\frac{\mu^2(D)}{\psi_{s+1}(D)}\right) c(G, D), \quad s \neq -1. \tag{6. 10}$$

A final illustration is also listed (cf. [4, (40)]),

$$\sigma_s(G, H) \equiv \varrho^s(H) \sum_{D|(G,H)} \varrho(D)\, \varphi_{s+1}(H/D) = \varrho^{s+1}(H) \sum_{D|H} \frac{c(G, D)}{\varrho^{s+1}(D)}. \tag{6. 11}$$

Bibliography.

[1] *Eckford Cohen*, A class of arithmetical functions, Proceedings of the National Academy of Sciences, **41** (1955), 939—944.

[2] *Eckford Cohen*, Representations of even functions (mod r), I. Arithmetical identities, Duke Mathematical Journal, **25** (1958), 401—421.

[3] *Eckford Cohen*, Representations of even functions (mod r), II. Cauchy Products, Duke Mathematical Journal, **26** (1959), 165—182.

[4] *Eckford Cohen*, Trigonometric sums in elementary number theory, American Mathematical Monthly, **66** (1959), 105—117.

[5] *Eckford Cohen*, A class of residue systems (mod r) and related arithmetical functions, I. A generalization of Möbius inversion, Pacific Journal of Mathematics, **9** (1959), 13—23.

[6] *Eckford Cohen*, Arithmetical inversion formulas, Canadian Journal of Mathematics, **12** (1960), 399—409.

[7] *Eckford Cohen*, Arithmetical functions of finite abelian groups, to appear in Mathematische Annalen.

[8] *R. R. Stoll*, Linear Algebra and Matrix Theory, New York, 1952.

Eingegangen 2. September 1960.

Criteria for Generalized Kummer's Congruences.

By *L. Carlitz* and *Harlan Stevens* at Durham (North Carolina, U.S.A.).

1. Introduction.

Kummer [6] has obtained the following interesting general result. Let p be a fixed prime $\geqq 2$. Then if

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{k!} (e^x - 1)^k, \tag{1.1}$$

where a_n and $\frac{A_k}{k!}$ are integral (mod p), it follows that

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} a_{n+s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (n \geqq r). \tag{1.2}$$

In such a case, the sequence $\{a_n\}$ is said to satisfy Kummer's congruence. In [4] Carlitz shows that the hypothesis in (1.1) that $\frac{A_k}{k!}$ be integral (mod p) can be weakened. In fact, he proves the following theorem.

Theorem A. *Let $f(x)$ be an arbitrary series of the form* (1.1). *Then the a_n satisfy* (1.2) *if and only if*

$$A_k \equiv 0 \pmod{p^{[k/p]}} \qquad (k \geqq 0), \tag{1.3}$$

where the A_k are also given by (1.1).

Suppose that $g(x)$ is an arbitrary series such that

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{f^k(x)}{k!}, \tag{1.4}$$

where the c_n are integral (mod p) and $f(x)$ is a fixed series given by (1.1). Furthermore, suppose that $f(x)$ is such that the a_n satisfy (1.2). Carlitz also proves the following generalization of Theorem A.

Theorem B. *The numbers c_n defined by* (1.4) *satisfy*

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} c_{n+s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (n \geqq r)$$

if and only if

$$C_k \equiv 0 \pmod{p^{[k/p]}} \qquad (k \geqq 0),$$

where the C_k are also given by (1.4).

Certain sequences do not satisfy (1. 2) but instead satisfy a congruence of the form

$$(1.5)\qquad \sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}a(n+s(p^t-1))\equiv 0 \pmod{p^r}\qquad (n\geqq r),$$

where t is some fixed positive integer and $a(m)=a_m$. For example, put

$$\Phi_{0,q}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{nq}}{(nq)!}$$

and define rational numbers d_n by

$$\frac{1}{\Phi_{0,q}(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\frac{x^n}{n!}.$$

It is shown in [2] that the sequence $\{d_n\}$ satisfies a congruence like (1. 5) provided $p\nmid q$ and t is the least positive integer such that

$$(1.6)\qquad p^t\equiv 1 \pmod{q}.$$

We shall also refer to (1. 5) as Kummer's congruence for $\{a_n\}$.

In the light of Theorems A and B, it seems natural to seek necessary and sufficient conditions for a sequence $\{a_n\}$ to satisfy (1. 5). For this purpose, we first define

$$\Phi_{1,q}(x)=\Phi_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{mq+1}}{(mq+1)},$$

where q is a fixed positive integer such that $p\nmid q$, $q\geqq p-1$. Next, put

$$(1.7)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_k}{k!}\Phi_1^k(x),$$

where the a_n are assumed to be integral (mod p) and t is defined as in (1. 6). Corresponding to Theorem A we show (Theorem 2) that if in (1. 7)

$$(1.8)\qquad \begin{cases} A_k\equiv 0 \pmod{p^{[k/p^t]}} & (0\leqq k<p^{t+1}),\\ A_k\equiv 0 \pmod{p^{p-1}} & (k\geqq p^{t+1}),\end{cases}$$

then (1. 5) holds provided $r<p$. Conversely, we show that if (1. 5) holds for $r<p$, then (1. 8) is satisfied.

Analogous to Theorem B, we also obtain the following result (Theorem 7). Let $f(x)$ be defined by (1. 7) and suppose that $a_0=0$, $a_1=1$ and

$$\begin{cases} A_k\equiv 0 \pmod{p^{[k/p^t]}} & (k\geqq p^t),\\ A_k\equiv 0 \pmod{p} & (p\leqq k<p^t).\end{cases}$$

Then the A_k satisfy (1. 8) and by our remarks above (1. 5) holds for $r<p$. Furthermore, again assume that $g(x)$ is an arbitrary series and it is expressed in terms of $f(x)$ by (1. 4). It is shown in § 7 that the c_n defined by (1. 4) satisfy

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}c(n+s(p^t-1))\equiv 0 \pmod{p^r}$$

for all $r<p$ and $n\geqq r$ if and only if

$$\begin{cases} C_k\equiv 0 \pmod{p^{[k/p^t]}} & (0\leqq k<p^{t+1}),\\ C_k\equiv 0 \pmod{p^{p-1}} & (k\geqq p^{t+1}).\end{cases}$$

We have not been able to obtain complete generalizations of Theorems A and B. The question remains, for example, as to whether or not hypotheses similar to (1. 8) can be obtained which imply (1. 5) without the restriction $r < p$.

Finally, it may be of interest to observe that $\Phi_1(x)$ plays the same special role in this paper as did $e^x - 1$ in [4].

2. Preliminaries.

We recall that a Hurwitz series [5] is one of the form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \tag{2. 1}$$

where the a_n are integers. For brevity we denote by $\mathfrak{H}_p$ the set of all series (2. 1) in which the a_n are integral (mod p). We will also make use of a result proved by Hurwitz [5] which we call

Hurwitz's Lemma. *Is in* (2. 1) *the leading coefficient* $a_0 = 0$, *then*

$$f^k(x) \equiv 0 \pmod{k!}.$$

The statement

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} \pmod{m}$$

is equivalent to

$$a_n \equiv b_n \pmod{m} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

For the fixed positive integer $q \geqq p - 1$, $p \nmid q$, we also define the set of functions

$$\Phi_{a,q}(x) = \Phi_a(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{mq+a}}{(mq+a)!} \qquad (a = 0, 1, \ldots, q-1). \tag{2. 2}$$

It will help to observe that

$$D^i \Phi_a(x) = \Phi_{a'}(x) \qquad \left(D = \frac{d}{dx}\right),$$

where a' is the least non-negative residue of $a - i$ (mod q).

Finally, we make use of the following functions. Put

$$\begin{aligned} \mu(k) &= \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \cdots, \\ \nu_t(k) &= \mu(k) - \left[\frac{k}{p^t}\right], \end{aligned} \tag{2. 3}$$

where $[x]$ is the greatest integer function. Thus $p^{\mu(k)}$ is the highest power of p that divides $k!$.

3. Lemmas.

It will be convenient to make use of the following operator. Set

$$\Omega_t = D^{p^t} - D \qquad \left(D = \frac{d}{dx}\right).$$

It is shown in [3] that Ω_t has the property

$$\Omega_t^r (A(x) \cdot B(x)) = \sum_{i+j \leq r} p^i U_{ij}^{(r)} \Omega_t^j A(x) \cdot V_{ij}^{(r)} \Omega_t^{r-i-j} B(x), \tag{3. 1}$$

where $U_{ij}^{(r)}$, $V_{ij}^{(r)}$ are polynomials in D with integral coefficients and $A(x), B(x) \in \mathfrak{H}_p$.

We now put $\Phi_i = \Phi_i(x)$ and we prove

Lemma 1. *Set*

$$\Phi_0^{a_0}\Phi_1^{a_1}\cdots\Phi_{q-1}^{a_{q-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{x^n}{n!}; \tag{3.2}$$

then

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} G(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (n \geqq r), \tag{3.3}$$

where $p \nmid q$ and t is defined as in (1.6).

Proof. First, set

$$\Phi_j(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{mq+j}}{(mq+j)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!},$$

where j is arbitrary. It is evident that

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \alpha(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r}. \tag{3.4}$$

Therefore we may write

$$\Omega_t^r \Phi_j(x) \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Using (3.1) and induction, it easily follows that

$$\Omega_t^r \Phi_0^{a_0}\Phi_1^{a_1}\cdots\Phi_{q-1}^{a_{q-1}} \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Consequently, (3.3) follows.

It will also be necessary to have di Bruno's formula [7, pp. 35—36] for taking successive derivatives of a function of a function. Write

$$A(x) = f[g(x)]$$

and, with $D_x = \dfrac{d}{dx}$, $D_u = \dfrac{d}{du}$,

$$[D_u^n f(u)]_{u=g(x)} = f_n,$$
$$D_x^n g(x) = g_n.$$

Then di Bruno's formula states

$$D_x^n A(x) = \sum \frac{n!\, f_{k_1+k_2+\cdots+k_n} g_1^{k_1} g_2^{k_2} \cdots g_n^{k_n}}{k_1!\,(1!)^{k_1} k_2!\,(2!)^{k_2} \cdots k_n!\,(n!)^{k_n}}, \tag{3.5}$$

where the sum is over all solutions in non-negative integers of $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$.

We now prove

Lemma 2. *Set*

$$M = \frac{n!}{k_1!\,(1!)^{k_1} k_2!\,(2!)^{k_2} \cdots k_n!\,(n!)^{k_n}}, \tag{3.6}$$

where $k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$; then M is integral. Also, if in (3.6) *$n = p^t$ and $jk_j \neq p^t$ for any j, then*

$$M \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3.7}$$

Proof. We first write

$$M = M_1 M_2,$$

where

$$M_1 = \frac{n!}{k_1!\,(2k_2)!\cdots(nk_n)!},$$

$$M_2 = \frac{k_1!}{k_1!}\cdot\frac{(2k_2)!}{k_2!\,(2!)^{k_2}}\cdots\frac{(nk_n)!}{k_n!\,(n!)^{k_n}}.$$

M_1 is a multinomial coefficient. Since M_2 is a product of integers (see [1, p. 57]) of the form $\frac{(ab)!}{(a!)^b b!}$, M is therefore integral. If $n = p^t$ and $jk_j \neq p^t$ $(j = 1, 2, \ldots, p^t)$, then by the multinomial theorem $p \mid M_1$ and the proof of the lemma is complete.

Next we define

$$W_{k,0}(x) = W_k = \frac{\Phi_1^k(x)}{k!},$$

$$W_{k,h}(x) = W_{k,h} = \frac{(\Phi_1^{(h)}(x))^k}{k!},$$

where $\Phi_1^{(h)}(x)$ denotes the h-th derivative of $\Phi_1(x)$, and we prove

Lemma 3. *Put*

$$W_{k,h} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \frac{x^n}{n!} \qquad (0 \leqq k < p);$$

then

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} t(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (n \geqq r). \tag{3.8}$$

Proof. Again using the operator Ω_t, we may express (3.8) as

$$\Omega_t^r W_{k,h} \equiv 0 \pmod{p^r}. \tag{3.9}$$

Consider first the case $r = 1$. In (3.5) put $f(u) = \frac{u^k}{k!}$, $u = \Phi_1^{(h)}(x)$ and let $n = p^t$. Since $f_{k_1+k_2+\cdots+k_n} = 0$ for $k_1 + k_2 + \cdots + k_n > k$, we get

$$D^n W_{k,h} = W_{k-1,h}\Phi_1^{(n+h)} + \sum \frac{n!\,W_{k-k_1-\cdots-k_n}(\Phi_1^{(h+1)})^{k_1}(\Phi_1^{(h+2)})^{k_2}\cdots}{k!\,(1!)^{k_1}k_2!\,(2!)^{k_2}\cdots k_n!\,(n!)^{k_n}}, \tag{3.10}$$

where $n = p^t$ and the sum is over all solutions in integers of

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + p^t k_{p^t} = p^t,$$

except for those solutions of the form $jk_j = p^t$. Subtracting $DW_{k,h}$ in (3.10) and applying Lemma 2, we get

$$\Omega_t W_{k,h} = p\sum_{i=1}^{k} a(i)\,W_{k-i,h}\Phi_0^{a_0(i)}\Phi_1^{a_1(i)}\cdots\Phi_{q-1}^{a_{q-1}(i)}, \tag{3.11}$$

where $a(i)$, $a_0(i), \ldots, a_{q-1}(i)$ are integral. We may again apply Ω_t to both sides of (3.11) and, using (3.1) and Lemma 1, it is clear that

$$\Omega_t^2 W_{k,h} = p^2 \sum_{i=1}^{k} A_i(x)\,W_{k-i,h},$$

where $A_i(x)$ is a sum of terms of the form

$$N_i \Phi_0^{i_0} \Phi_1^{i_1} \cdots \Phi_{q-1}^{i_{q-1}}$$

and N_i is integral. Continuing in this way, (3. 9) can evidently be asserted for arbitrary r.

Finally, we state and prove

Lemma 4. *Put*

$$W_{p,(r-m+1)p^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^{(m)} \frac{x^n}{n!},$$

where $0 \leqq m \leqq r < p-1$; *then*

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} \omega^{(m)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^m} \qquad (n \geqq m). \tag{3. 12}$$

Proof. Again we make use of the operator Ω_t and express (3. 12) by

$$\Omega_t^m W_{p,(r-m+1)p^t-1} \equiv 0 \pmod{p^m}. \tag{3. 13}$$

For the case $m = 1$, di Bruno's formula can be applied exactly as in Lemma 3 and we obtain

$$\begin{aligned} \Omega_t W_{p,rp^t-1} = {} & \frac{p^t!}{p!(p^{t-1}!)^p} (\Phi_1^{((r+1)p^t-1)})^p \\ & + p \sum_{i=1}^{p} c_i W_{p-i,\, rp^t-1} \Phi_0^{c_0(i)} \Phi_1^{c_1(i)} \cdots \Phi_{q-1}^{c_{q-1}(i)}, \end{aligned} \tag{3. 14}$$

where $c_i, c_0(i), \ldots, c_{q-1}(i)$ are integers. From Lemma 2 it is clear that $\dfrac{p^t!}{p!(p^{t-1}!)^p}$ is integral. Since $r + 1 < p$, $q \geqq p - 1$ and therefore $(r + 1)\, p^{t-1} \not\equiv 1 \pmod{q}$, it follows that

$$\Phi_1^{((r+1)p^t-1)} \neq \Phi_0(x).$$

Thus, from Hurwitz's Lemma,

$$(\Phi_1^{((r+1)p^t-1)})^p \equiv 0 \pmod{p}$$

and we may assert (3. 13) for $m = 1$. Assume (3. 13) for $m = 1, 2, \ldots, m'$ $(m' < r)$. Then

$$\begin{aligned} \Omega_t W_{p,(r-m')p^t-1} = {} & \frac{p^t!}{p!(p^{t-1}!)^p} (\Phi_1^{((r-m'+1)p^t-1)})^p \\ & + p \sum_{i=1}^{p} d_i W_{p-i,(r-m'+1)p^t-1} \Phi_0^{d_0(i)} \Phi_1^{d_1(i)} \cdots \Phi_{q-1}^{d_{q-1}(i)}. \end{aligned} \tag{3. 15}$$

Applying $\Omega_t^{m'}$ to both sides of (3. 15), we get finally

$$\begin{aligned} \Omega_t^{m'+1} W_{p,(r-m')p^t-1} = {} & \frac{p^t}{(p^{t-1}!)^p} \Omega_t^{m'} W_{p,(r-m'+1)p^t-1} \\ & + p \sum_{i=1}^{p} d_i \Omega_t^{m'} (W_{p-i,(r-m'+1)p^t-1} \Phi_0^{d_0(i)} \Phi_1^{d_1(i)} \cdots \Phi_{q-1}^{d_{q-1}(i)}). \end{aligned}$$

It is clear that

$$\frac{p^t!}{(p^{t-1}!)^p} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Therefore (3. 1), Lemmas 1 and 3 and our induction hypothesis imply

$$\Omega_t^{m'+1} W_{p,(r-m')p^t-1} \equiv 0 \pmod{p^{m'+1}}$$

and the induction is complete.

4. First main result.

Recalling first the definitions in § 2, we next prove the following key result.

Theorem 1. *Put*

$$\Phi_1^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}.$$

If $r < p$ *and* $q \geqq p-1$, *then*

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} c^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv (\text{mod } p^{r+\nu_t(k)}) \tag{4.1}$$

for all $n \geqq r \geqq 0$.

Proof. By Hurwitz's Lemma

$$c_n^{(k)} \equiv 0 \ (\text{mod } p^{\mu(k)}).$$

Hence if $r \leqq \frac{k}{p^t}$, (4. 1) is obviously true. We accordingly assume that $r > \frac{k}{p^t}$.

We can express (4. 1) by means of

$$(D^{p^t} - D)^r \Phi_1^k(x) \equiv 0 \ (\text{mod } p^{r+\nu_t(k)})$$

or, equivalently,

$$\Omega_t^r W_k \equiv 0 \ (\text{mod } p^{r-[k/p^t]}). \tag{4.2}$$

It should be recalled that

$$W_k = \frac{\Phi_1^k(x)}{k!}.$$

Suppose that λ is such that

$$(r-\lambda)\, p^t \leqq k, \quad (r-\lambda+1)\, p^t > k; \tag{4.3}$$

that is

$$\lambda = r - \left[\frac{k}{p^t}\right]. \tag{4.4}$$

Then, in order to prove (4. 2), it will be sufficient to show that

$$\Omega_t^r W_k = \sum_{s=0}^{r} p^s T_{r,s}(x), \tag{4.5}$$

where

$$T_{r,s}(x) = \sum_{i=0}^{k} W_{k-i-(r-s)p^t} Q_i(x)$$

and $Q_i(x) \in \mathfrak{H}_p$. In this situation (4. 3) and (4. 4) evidently imply (4. 2).

We now prove (4. 5) for $r < p$. As a first step, $\Omega_t W_k$ can again be determined by means of (3. 5). We obtain in the sum terms of the following types:

(A) $$pG_1 W_{k-i} \Phi_0^{a_0} \Phi_1^{a_1} \cdots \Phi_{q-1}^{a_{q-1}},$$

where $G_1, a_0, \ldots, a_{q-1}$ are integers;

(B) $$G_2 W_{k-i} (\Phi_1^{(p^{t-\alpha})})^{p^\alpha},$$

where G is integral and $1 < \alpha < t$; a single term

(C) $$W_{k-p^t} (\Phi_0)^{p^t};$$

and finally a term

$$\text{(D)} \qquad G_3 W_{k-p} (\Phi_1^{(p^t-1)})^p,$$

where G_3 is integral. Since $p^{t-\alpha} \not\equiv 1 \pmod q$ for $0 < \alpha < r$ and therefore $\Phi_1^{(p^{t-\alpha})} \neq \Phi_0$, Hurwitz's Lemma applies and thus p divides terms of type B and D. Hence (4. 5) is true for $r = 1$. We now assume (4. 5) to be true for $r = 1, 2, \ldots, r' - 1$, where $r' < p$. Then $\Omega_t^{r'} W_k$ is a sum of terms of the following types:

$$\text{(A}'\text{)} \qquad pG_1 \Omega_t^{r'-1} W_{k-i} \Phi_0^{a_0} \Phi_1^{a_1} \cdots \Phi_{q-1}^{a_{q-1}};$$

$$\text{(B}'\text{)} \qquad G_2 \Omega_t^{r'-1} W_{k-i} (\Phi_1^{(p^{t-\alpha})})^{p^\alpha},$$

where $1 < \alpha < t$; a single term

$$\text{(C}'\text{)} \qquad \Omega_t^{r'-1} W_{k-p^t} (\Phi_0)^{p^t};$$

and a single term

$$\text{(D}'\text{)} \qquad G_3 \Omega_t^{r'-1} W_{k-p} (\Phi_1^{(p^t-1)})^p.$$

Since $\mu(p^\alpha) > r$ for $1 < \alpha < t$, Hurwitz's Lemma implies that each term of type B′ is divisible by at least p^r. Hence these terms are of the form $p^s T_{r',s}(x)$ $(0 \leqq s \leqq r')$, where $T_{r',s}(x)$ is defined as in (4. 5).

For terms of type A′ we can make use of (3. 1). Then

$$\text{(4. 6)} \qquad pG_1 \Omega_t^{r'-1} W_{k-i} \Phi_0^{a_0} \Phi_1^{a_1} \cdots \Phi_{q-1}^{a_{q-1}}$$
$$= G_1 \sum_{h+j \leqq r'-1} p^{h+1} U_{h,j}^{(r'-1)} \Omega_t^j W_{k-i} \cdot V_{h,j}^{(r'-1)} \Omega_t^{r'-1-h-j} \cdot \Phi_0^{a_0} \cdots \Phi_{q-1}^{a_{q-1}}.$$

We may now apply Lemma 1 and our assumption about the form of $\Omega^j W_{k-i}$ for $j \leqq r' - 1$. The right hand side of (4. 6) can be represented as

$$\sum_{j=0}^{r'-1} \sum_{s=0}^{j} p^{s+r'-j} \sum_{i=0}^{k} W_{k-i-(j-s)p^t} R_i(x),$$

where $R_i(x) \in \mathfrak{H}_p$. Therefore (4. 6) contains only terms with the form of those on the right side of (4. 5) for $r = r'$.

Consider now the single term of type C′. Again, if (3. 1) and Lemma 1 are applied, we obtain only the terms like

$$\sum_{s=0}^{j} p^{s+r'-j-1} \sum_{i=0}^{k} W_{k-i-(j-s+1)p^t} R_i(x).$$

Since $j - s + 1 = r' - (s + r' - j - 1)$, we get only terms with the form of those in (4. 5) for $r = r'$.

Finally, for the single term of type D′,

$$G_3 \Omega_t^{r'-1} W_{k-p} (\Phi_1^{(p^t-1)})^p$$
$$= G_3 \sum_{i+j \leqq r'-1} p^i U_{ij}^{(r'-1)} \Omega_t^j W_{k-p} V_{ij}^{(r'-1)} \Omega_t^{r'-1-i-j} (\Phi_1^{(p^t-1)})^p.$$

Since $r' - i - j < p$, we can use Lemma 4 and therefore

$$\Omega_t^{r'-1-i-j} (\Phi_1^{(p^t-1)})^p \equiv 0 \pmod{p^{r'-i-j}}.$$

Hence we have the same situation as for terms of type A′. The induction is now complete and we may assert (4. 5) for arbitrary $r < p$.

5. Second main result.

Let

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \tag{5.1}$$

be an arbitrary series in $\mathfrak{H}_p$. Since

$$\Phi_1(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{nq+1}}{(nq+1)!},$$

it follows that (see [5])

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k \Phi_1^k(x)}{k!} \qquad (A_0 = a_0), \tag{5.2}$$

where the A_k are integral (mod p). Thus an arbitrary $f(x)$ in $\mathfrak{H}_p$ will always be representable in the form (5.2).

Assume now that the A_k satisfy

$$\begin{cases} A_k \equiv 0 \pmod{p^{[k/p^t]}} & (0 \leqq k < p^{t+1}), \\ A_k \equiv 0 \pmod{p^{p-1}} & (k \geqq p^{t+1}), \end{cases} \tag{5.3}$$

where t is defined as in (1.6). Applying the operator Ω_t^r to both sides of (5.2), we get

$$\Omega_t^r f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \Omega_t^r \frac{\Phi_1^k(x)}{k!}. \tag{5.4}$$

By Hurwitz's Lemma

$$W_k = \frac{\Phi_1^k(x)}{k!} \in \mathfrak{H}_p$$

for all k and consequently

$$\Omega_t^r W_k \in \mathfrak{H}_p.$$

Thus if $r < \frac{k}{p^t}$, then (5.3) and (5.4) evidently imply that

$$A_k \Omega_t^r W_k \equiv 0 \pmod{p^r}, \tag{5.5}$$

provided $r < p$. If $r \geqq \frac{k}{p^t}$, then (5.5) holds by virtue of (4.2) and (5.3). Thus (5.4) implies

$$\Omega_t^r f(x) \equiv 0 \pmod{p^r}, \tag{5.6}$$

provided $r < p$.

Since

$$\begin{aligned} (D^{p^t} - D)^r f(x) &= \left(\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} D^{r+s(p^t-1)} \right) f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} a(n + s(p^t - 1)), \end{aligned}$$

it follows from (5.6) that

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} a(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (n \geqq r) \tag{5.7}$$

for $r < p$. We have therefore proved that (5.3) implies (5.7).

We now assume that (5. 7) holds for all $n \geqq r \geqq 0$ and $r < p$. Then (5. 6) becomes

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \Omega_t^r \frac{\Phi_1^k(x)}{k!} \equiv 0 \pmod{p^r}. \tag{5. 8}$$

Put

$$\Phi_1^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}. \tag{5. 9}$$

Since

$$c_n^{(k)} = 0 \qquad (k > n), \tag{5. 10}$$

(5. 8) implies

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A_k \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} c^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r} \tag{5. 11}$$

for all $n \geqq r \geqq 0$, $r < p$ and $N \geqq n + r(p^t - 1)$.

We now assume that (5. 3) holds for $k < h < p^{t+1}$ and put

$$h = rp^t + r_0 \qquad (0 \leqq r_0 < p^t;\ r < p).$$

In (5. 11) take $n = r + r_0$, $N = h$. Since by (4. 1)

$$\frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} c^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{r - [k/p^t]}},$$

it follows by the inductive hypothesis that

$$\frac{1}{k!} A_k \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} c^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

for all $k < h$. Hence (5. 10) reduces to

$$\frac{1}{h!} A_h \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} c^{(h)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

For $n = r + r_0$, $h = rp^t + r_0$, this becomes because of (5. 10)

$$\frac{1}{h!} A_h c_h^{(h)} \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Since $c_h^{(h)} = h!$, we get

$$A_h \equiv 0 \pmod{p^r},$$

that is

$$A_h \equiv 0 \pmod{p^{[h/p^t]}} \qquad (h < p^{t+1}). \tag{5. 12}$$

Assume now that (5. 3) holds for all $k < h$, where $h \geqq p^{t+1}$, and put

$$h = r_1 p^t + r_0 \qquad (0 \leqq r_0 < p^t;\ r_1 \geqq p).$$

It is evident from (5. 8) that

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \Omega_t^{r_1} \frac{\Phi_1^k(x)}{k!} \equiv \Omega_t^{r_1 - p + 1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \Omega_t^{p-1} \frac{\Phi_1^k(x)}{k!} \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}. \tag{5. 13}$$

Consequently, in place of (5. 11) we may assert

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A_k \sum_{s=0}^{r_1} (-1)^s \binom{r_1}{s} c^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{p-1}} \tag{5. 14}$$

for all $n \geqq r_1 \geqq p$ and $N \geqq n + r_1(p^t - 1)$. In (5. 14) take $N = h$, $n = r_0 + r_1$. Using the same device as in (5. 13), it is also clear from (4. 2) that

$$\frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{r_1} (-1)^s \binom{r_1}{s} c^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{p-1-[k/p^t]}}$$

for $n \geqq r_1$. Thus, from the fact that $k! \mid c_m^{(k)}$ $(m \geqq 0)$ and the inductive hypothesis, it follows that

$$\frac{1}{k!} A_k \sum_{s=0}^{r_1} (-1)^s \binom{r_1}{s} c^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}$$

for all $k < h$. Hence (5. 14) reduces to

$$\frac{1}{h!} A_h \sum_{s=0}^{r_1} (-1)^s \binom{r_1}{s} c^{(h)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}.$$

For $n = r_1 + r_0$, $h = r_1 p^t + r_0$, this becomes because of (5. 10)

$$\frac{1}{h!} A_h c_h^{(h)} \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}.$$

Therefore

$$A_h \equiv 0 \pmod{p^{p-1}} \qquad (h \geqq p^{t+1})$$

and the proof of (5. 3) is complete.

We now state

Theorem 2. *Let*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{\Phi_1^k(x)}{k!} \tag{5. 15}$$

be an arbitrary series belonging to $\mathfrak{H}_p$. *Furthermore, suppose that* $r < p$ *and* $q \geqq p - 1$. *Then*

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} a(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r} \tag{5. 16}$$

for all $n \geqq r \geqq 0$ *if and only if*

$$A_k \equiv 0 \pmod{p^{[k/p^t]}} \qquad (0 \leqq k < p^{t+1}),$$
$$A_k \equiv 0 \pmod{p^{p-1}} \qquad (k \geqq p^{t+1}).$$

6. Generalization of Theorem 1.

Before extending Theorem 1, we shall find it necessary to have

Theorem 3. *Let*

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!},$$

where the A_n *are integral* (mod p) *and*

$$A_n \equiv 0 \pmod{p^{[n/p^t]}} \qquad (n \geqq p^t), \tag{6. 1}$$

$$A_n \equiv 0 \pmod{p} \qquad (p \leqq n < p^t), \tag{6. 2}$$

$$A_n \equiv 0 \pmod{1} \qquad (n < p). \tag{6. 3}$$

Put

$$g^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} A_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}; \tag{6.4}$$

then

$$A_n^{(k)} \equiv 0 \pmod{p^{[n/p^t]+\nu_t(k)}} \qquad (k \geqq 0). \tag{6.5}$$

Proof. For an arbitrary sum $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, formal application of the multinomial theorem gives

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right\}^k = \sum \frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdots,$$

where summation is over all non-negative integral solutions of

$$k_1 + k_2 + \cdots = k. \tag{6.6}$$

The coefficient of $\frac{x^n}{n!}$ in (6.4) is therefore

$$A_n^{(k)} = n!\sum \frac{k!}{k_1!(1!)^{k_1} k_2!(2!)^{k_2}\cdots} A_1^{k_1} A_2^{k_2} \cdots, \tag{6.7}$$

where in this case summation is over all simultaneous non-negative solutions $k_1, k_2, \ldots$ of both (6.6) and

$$n = \sum_j jk_j = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots. \tag{6.8}$$

We now define the arithmetic function

$$\begin{cases} \delta(j) = \left[\frac{j}{p^t}\right] & (j \geqq p^t), \\ \delta(j) = 1 & (p \leqq j < p^t), \\ \delta(j) = 0 & (j < p). \end{cases} \tag{6.9}$$

In the light of (6.1), (6.2), (6.3), (6.7) and the definitions at the end of § 2, it will be clearly sufficient to prove (6.5) if we show that

$$\mu(n) - \sum_j \{\mu(k_j) + k_j\mu(j)\} + \sum_j k_j\delta(j) \geqq \left[\frac{n}{p^t}\right] - \left[\frac{k}{p^t}\right]. \tag{6.10}$$

Since

$$\left[\frac{a+b}{p^s}\right] \geqq \left[\frac{a}{p^s}\right] + \left[\frac{b}{p^s}\right]$$

for arbitrary s, it is evident from (2.3), (6.6) and (6.8) that we may replace (6.10) by

$$\sum_j \mu(jk_j) - \sum_j \{\mu(k_j) + k_j\mu(j)\} + \sum_j k_j\delta(j) \geqq \sum_j \left[\frac{jk_j}{p^t}\right] - \sum_j \left[\frac{k_j}{p^t}\right]. \tag{6.11}$$

Finally, it is clear that we may treat (6.11) termwise and it will be enough to prove

$$\mu(jh) - \mu(h) - h\mu(j) + h\delta(j) \geqq \left[\frac{jh}{p^t}\right] - \left[\frac{h}{p^t}\right], \tag{6.12}$$

where $j > 0$ and $h = k_j$.

First of all, we set

$$j = j_0 + j_1 p + \cdots + j_{t-1} p^{t-1} + j_t p^t, \tag{6.13}$$

where $0 \leqq j_i < p$ $(0 \leqq i \leqq t-1)$, j_t is arbitrary and not all $j_i = 0$.

We may now consider the various cases indicated by (6.9).

Case 1. $(j \geqq p^t)$. In this case we will show the stronger result

$$\mu(jh) - \mu(h) - h\mu(j) + h\left[\frac{j}{p^t}\right] \geqq \left[\frac{jh}{p^t}\right]. \tag{6.14}$$

To begin with, we note that

$$j_t = \left[\frac{j}{p^t}\right] \tag{6.15}$$

and

$$\left[\frac{jh}{p^t}\right] = j_t h + \left[\frac{1}{p^t}(j_0 + j_1 p + \cdots + j_{t-1} p^{t-1}) h\right]. \tag{6.16}$$

As we have previously remarked, $\dfrac{(ab)!}{b!(a!)^b}$ is integral if $a \geqq 0$, $b > 0$ and therefore

$$\mu(ab) \geqq \mu(a) + a\mu(b). \tag{6.17}$$

Thus we have

$$\mu(j_t h) \geqq \mu(h) + h\mu(j_t). \tag{6.18}$$

From (2.3) it is clear that

$$\begin{aligned} \mu(j) &= (j_1 + \cdots + j_t p^{t-1}) + (j_2 + \cdots + j_t p^{t-2}) \\ &\qquad + \cdots + (j_{t-1} + j_t p) + j_t + \mu(j_t) \\ &= \mu'(j) + \mu(j_t). \end{aligned} \tag{6.19}$$

In (6.19) we have put

$$\mu'(j) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{s=0}^{i-1} j_i p^s.$$

Thus, first substituting for $\mu(j)$ in (6.14) and then applying (6.15) and (6.18), it will evidently suffice to show that

$$\mu(jh) - \mu(j_t h) - h\mu'(j) + j_t h \geqq \left[\frac{jh}{p^t}\right]. \tag{6.20}$$

Since

$$jh = p^t j_t h + (j_0 + j_1 p + \cdots + j_{t-1} p^{t-1}) h,$$

it follows readily that

$$\mu(jh) \geqq \mu(j_t h) + h\mu'(j) + \left[\frac{1}{p^t}(j_0 + j_1 p + \cdots + j_{t-1} p^{t-1}) h\right].$$

Thus, in view of (6.16) and (6.20), we clearly have shown (6.12) for $j \geqq p^t$.

Case 2 $(p \leqq j < p^t)$. Again, recalling (6.9), it will be more than enough to prove (6.12) in this case if we show that

$$\mu(jh) - \mu(h) - h\mu(j) + h \geqq \left[\frac{jh}{p^t}\right]. \tag{6.21}$$

Since $j > 0$, (6. 17) implies

$$\mu(jh) - \mu(h) - h\mu(j) \geqq 0$$

and therefore (6. 21) obviously follows.

Case 3 ($j < p$). It will suffice here if we show that

$$\mu(jh) - \mu(h) \geqq \left[\frac{jh}{p^t}\right] - \left[\frac{h}{p^t}\right]$$

or, equivalently,

$$\nu_t(jh) \geqq \nu_t(h).$$

From (2. 3), $\nu_t(k)$ is evidently an increasing function and consequently the proof of our theorem is complete.

Since, for cases 1 and 2, we were able to prove somewhat more than was required by (6. 12), we may state the following theorem.

Theorem 4. *Let*

$$g(x) = \sum_{n=p}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!},$$

where the A_n are integral (mod p) *and* (6. 1), (6. 2) *are satisfied. Then*

$$A_n^{(k)} \equiv 0 \pmod{p^{[n/p^t]+\mu(k)}},$$

where $A_n^{(k)}$ is defined by (6. 4).

It is now easy to generalize Theorem 1. We therefore state and prove

Theorem 5. *Let*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\Phi_1^n(x)}{n!}, \tag{6. 22}$$

where the A_n are integral (mod p) *and* (6. 1), (6. 2) *and* (6. 3) *are satisfied. Put*

$$f^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}.$$

Then

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} a^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{r+\nu_t(k)}},$$

provided $n \geqq r \geqq 0$ and $r < p$.

Proof. We first set

$$f^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} A_n^{(k)} \frac{\Phi_1^n(x)}{n!}.$$

so that

$$\Omega_t^r f^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} A_n^{(k)} \Omega_t^r \frac{\Phi_1^n(x)}{n!},$$

where Ω_t is the operator defined in § 3. By (4. 2),

$$\Omega_t^r \frac{\Phi_1^n(x)}{n!} \equiv 0 \pmod{p^{r-[n/p^t]}}$$

for $r \geqq \left[\frac{n}{p^t}\right]$ and $r < p$. Therefore (6. 5) implies that

$$A_n^{(k)} \Omega_t^r \frac{\Phi_1^n(x)}{n!} \equiv 0 \pmod{p^{r+\nu_t(k)}}. \tag{6. 23}$$

For all r we have

$$A_n^{(k)} \Omega_t^r \frac{\Phi_1^n(x)}{n!} \equiv 0 \pmod{p^{[n/p^t]+\nu_t(k)}},$$

so that (6. 23) holds for $r < \left[\frac{n}{p^t}\right]$ also. Therefore

$$(D^{p^t} - D)^r f^k(x) \equiv 0 \pmod{p^{r+\nu_t(k)}}$$

and the proof of Theorem 5 is complete.

Similarly, from Theorem 4 we can clearly obtain

Theorem 6. *Let*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=p}^{\infty} A_n \frac{\Phi_1^n(x)}{n!},$$

where the A_n are integral (mod p) *and* (6. 1) *and* (6. 2) *are satisfied. Put*

$$f^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}.$$

Then

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} a^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{r+\mu(k)}},$$

provided $n \geqq r \geqq 0$ and $r < p$.

7. Generalization of Theorem 2.

If

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\Phi_1^k(x)}{k!} \qquad (a_1 = 1), \tag{7. 1}$$

where the a_n and c_k are integral (mod p), then [5] the inverse of $f(x)$ is a series of the same kind:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!} \qquad (d_1 = 1),$$

where the d_n are integral (mod p). (The condition $a_1 = d_1 = 1$ can be replaced by the weaker condition $a_1 d_1 = 1$, $a_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$).

Thus, if $g(x)$ is an arbitrary series in $\mathfrak{H}_p$ it follows that

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{f^k(x)}{k!}, \tag{7. 2}$$

where the A_k are integral (mod p).

For brevity we let $\mathfrak{K}_{p,t}$ denote the set of series

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!} \in H_p$$

such that

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} C(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

for $n \geqq r \geqq 0$ and $r < p$.

Suppose now that $f(x)$ as defined by (7. 1) is a fixed series such that

$$c_k \equiv 0 \pmod{p^{[k/p^t]}} \qquad (k \geqq p^t),$$
$$c_k \equiv 0 \pmod{p} \qquad (p \leqq k < p^t).$$

Then by Theorem 5

$$\Omega_t^r f^k(x) \equiv 0 \pmod{p^{r+\nu_t(k)}} \qquad (r < p) \tag{7. 3}$$

and $f(x) \in \mathfrak{R}_{p,t}$. Also let $g(x)$ be a series defined by (7. 2) and assume throughout that $r < p$. We seek necessary and sufficient conditions that

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} b(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (n \geqq r). \tag{7. 4}$$

From (7. 2) we get

$$\Omega_t^r g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_n \Omega_t^r \frac{f^k(x)}{k!}. \tag{7. 5}$$

From (7. 3)

$$\Omega_t^r \frac{f^k(x)}{k!} \equiv 0 \pmod{p^{r-[k/p^t]}} \qquad \left(r \geqq \frac{k}{p^t}\right).$$

If we assume that the coefficients A_k occuring in (7. 2) satisfy

$$\begin{aligned} A_k &\equiv 0 \pmod{p^{[k/p^t]}} \qquad (0 \leqq k < p^{t+1}), \\ A_k &\equiv 0 \pmod{p^{p-1}} \qquad (k \geqq p^{t+1}), \end{aligned} \tag{7. 6}$$

it follows that

$$A_k \Omega_t^r \frac{f^k(x)}{k!} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad \left(r \geqq \frac{k}{p^t}\right). \tag{7. 7}$$

Indeed it is evident from (7. 6) that (7. 7) holds for $r < \dfrac{k}{p^t}$ also. Thus (7. 5) implies

$$\Omega_t^r g(x) \equiv 0 \pmod{p^r},$$

which is equivalent to (7. 4).

Conversely, suppose that (7. 4) holds for all $n \geqq r \geqq 0$ and $r < p$. We shall show that this implies (7. 6).

Assume that (7. 6) holds for all $k < h < p^{t+1}$ and put

$$h = rp^t + r_0 \qquad (0 \leqq r_0 < p^t;\ r < p).$$

It is clear from (7. 2) that

$$b_n = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A_k a_n^{(k)} \qquad (N \geqq n), \tag{7. 8}$$

where

$$f^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n^{(k)} \frac{x^n}{n!}.$$

Note that

$$a_n^{(k)} = 0 \qquad (k > n). \tag{7.9}$$

From (7.8) we get

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} b(n + s(p^t - 1))$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A_k \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} a^{(k)}(n + s(p^t - 1)),$$

where $N \geqq n + r(p^t - 1)$. Therefore by (7.4)

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A_k \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} a^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r}, \tag{7.10}$$

where $N \geqq n + r(p^t - 1)$. In (7.10) take $n = r + r_0$, $N = h$. Since by (7.3)

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} a^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{r + \nu_t(k)}} \qquad (n \geqq r),$$

it follows from the inductive hypothesis that

$$\frac{1}{k!} A_k \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} a^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

for all $k < h$. Hence (7.10) reduces to

$$\frac{1}{h!} A_h \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} a^{(h)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

For $n = r + r_0$, $h = rp^t + r_0$ this becomes because of (7.9)

$$\frac{1}{h!} A_h a_h^{(h)} \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Since $a_h^{(h)} = h!$ and $r = \left[\frac{h}{p^t}\right]$,

$$A_h \equiv 0 \pmod{p^{[h/p^t]}} \qquad (h < p^{t+1}). \tag{7.11}$$

Assume now that (7.6) holds for all $k < h$, where $h \geqq p^{t+1}$, and put

$$h = r_1 p^t + r_0 \qquad (0 \leqq r_0 < p^t;\ r_1 \geqq p).$$

It is evident from (7.5) that

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \Omega_t^{r_1} \frac{f^k(x)}{k!} \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}.$$

Consequently, instead of (7.10) we may assert

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A_k \sum_{s=0}^{r_1} (-1)^s \binom{r_1}{s} a^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}, \tag{7.12}$$

where $N \geqq n + r_1(p^t - 1)$ and $n \geqq r_1 \geqq p$. In (7.12) take $N = h$, $n = r_0 + r_1$. It is also clear from (7.3) that

$$\Omega_t^{r_1} \frac{f^k(x)}{k!} \equiv 0 \pmod{p^{p-1-[k/p^t]}} \qquad (k < p^{t+1})$$

or, equivalently,

$$\frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{r_1} (-1)^s \binom{r_1}{s} a^{(k)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{p-1-[k/p^t]}}$$

for $n \geqq r_1$. Thus from the inductive hypothesis it follows that (7. 12) reduces to

$$\frac{1}{h!} A_h \sum_{s=0}^{r_1} (-1)^s \binom{r_1}{s} a^{(h)}(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}.$$

For $n = r_1 + r_0$, $h = r_1 p^t + r_0$, this becomes because of (7. 9)

$$\frac{1}{h!} A_h a_h^{(h)} \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}$$

and therefore

$$A_h \equiv 0 \pmod{p^{p-1}} \qquad (h \geqq p^{t+1}).$$

The proof of (7. 6) is complete and we may now state

Theorem 7. *Let*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\Phi_1(x)}{k!} \qquad (a_1 = 1)$$

be in $\mathfrak{H}_p$ *and suppose*

$$c_k \equiv 0 \pmod{p^{[k/p^t]}} \qquad (k \geqq p^t)$$

$$c_k \equiv 0 \pmod{p} \qquad (p \leqq k < p^t).$$

Furthermore, let

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{f^k(x)}{k!}$$

be an arbitrary series out of $\mathfrak{H}_p$. *Then*

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} b(n + s(p^t - 1)) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

for all $r < p$ *and* $n \geqq r \geqq 0$ *if and only if*

$$A_k \equiv 0 \pmod{p^{[k/p^t]}} \qquad (0 \leqq k < p^{t+1}),$$

$$A_k \equiv 0 \pmod{p^{p-1}} \qquad (k \geqq p^{t+1}).$$

References.

[1] *P. Bachmann*, Niedere Zahlentheorie, I, Leipzig, 1902.

[2] *L. Carlitz*, Some arithmetic properties of the Olivier functions, Mathematische Annalen, 128 (1955), 412—419.

[3] *L. Carlitz*, Composition of sequences satisfying Kummer's congruences, Collectanea Mathematica, 11 (1959), 137—152.

[4] *L. Carlitz*, Criteria for Kummer's congruences, to appear in Acta Arithmetica.

[5] *A. Hurwitz*, Über die Entwickelungscoefficienten der lemniscatischen Funktionen, Mathematische Werke, 2, 342—373, Basel 1933.

[6] *E. E. Kummer*, Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwickelungscoefficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 41 (1851), 368—372.

[7] *J. Riordan*, An Introduction to Combinatorial Analysis, New York, 1958.

Eingegangen 27. September 1960.

412—419.
11 (1959),

Werke, 2,

stimmten
368—372.